

МОДЕЛИ КЛИМАТА И ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ

О.М.Подвигина

*Институт теории прогноза землетрясений и математической
геофизики РАН*

E-mail: olgap@mitp.ru

ПЛАН ДОКЛАДА:

1. Гетероклиматические циклы:
определение, примеры, чем интересны.
2. Модели климата:
существующие модели и нерешенные задачи.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим гладкую динамическую систему

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$\psi(\mathbf{x}_0, t)$ - траектория с начальным значением \mathbf{x}_0 в момент времени t

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$, такое что $\psi(A, t) = A$ для любого $t \in \mathbb{R}$, называется **инвариантным**

Примеры инвариантных множеств:

стационарные состояния, периодические орбиты, торы, гетероклинические циклы,

Инвариантное множество A называется **асимптотически устойчивым**, если существует окрестность $\mathcal{B}(A)$, такая что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(\mathbf{x}, t) \in A \text{ для любого } \mathbf{x} \in \mathcal{B}(A)$$

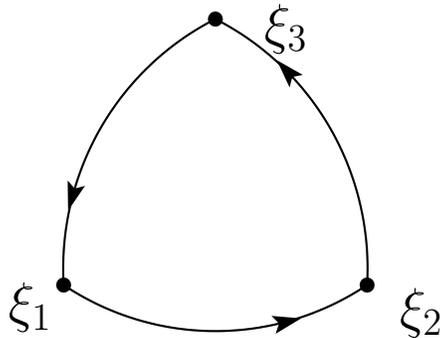
ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ

Существуют: инвариантные множества (узлы) $\xi_1, \dots, \xi_m \in \mathbb{R}^n$;

гетероклинические связи (наборы траектории)

$\kappa_j: \xi_j \rightarrow \xi_{j+1}$ for all $1 \leq j \leq m$ (где $\xi_{m+1} = \xi_1$).

Объединение **узлов** и **гетероклинических связей** называется а **гетероклиническим циклом**.



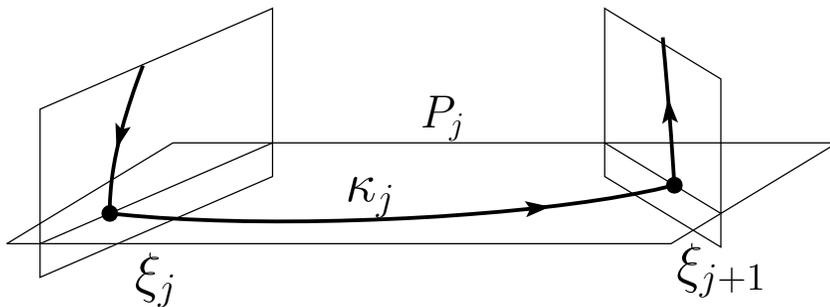
Пример гетероклинического цикла.

Динамическая система называется **структурно устойчивой**, если есть $\epsilon > 0$ такое, что из $\|f - \tilde{f}\| < \epsilon$ следует существование $F : \mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}$, где $F\psi(F\mathbf{x}, t) = \tilde{\psi}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

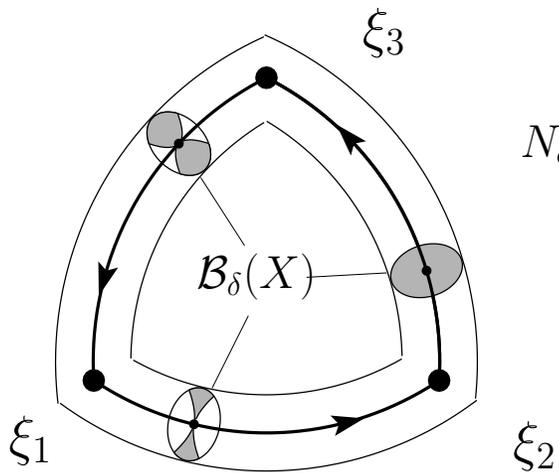
В структурно устойчивой динамической системе гетероклинические циклы **не существуют**.

В **Γ -эквивариантной системе**, т.е. $\gamma f(\mathbf{x}) = f(\gamma\mathbf{x})$ для любого $\gamma \in \Gamma$, где $\Gamma \subset O(n)$, гетероклинический цикл может существовать.

Гетероклинический цикл называется **структурно устойчивым (или типичным)**, если для любого j существует инвариантное пространство P_j , такое что ξ_{j+1} устойчиво в P_j и $\kappa_j \subset P_j$.



Пример инвариантного множества, которое не является асимптотически устойчивым, но **фрагментарно асимптотически устойчиво**:



$$N_\delta(X) = \{\mathbf{x} \in R^n : d(\mathbf{x}, X) < \delta\}$$

Пример гетероклинического цикла

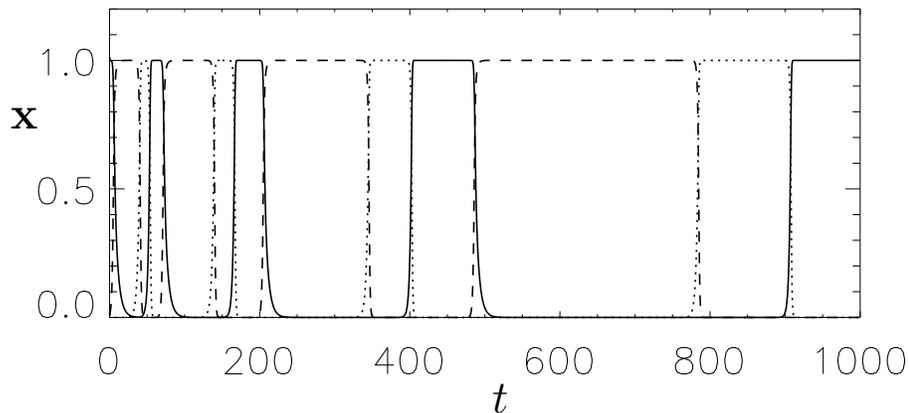
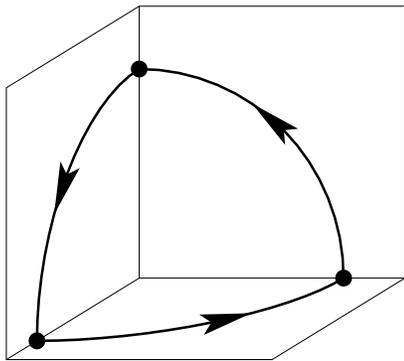
Динамическая система в \mathbb{R}^3 :

$$\dot{x}_j = x_j(\lambda_j + a_{1j}x_1^2 + a_{2j}x_2^2 + a_{3j}x_3^2), \quad j = 1, 2, 3,$$

где $\lambda_j = 1$, $a_{jj} = -1$, $\lambda_1 + a_{12} < 0$, $\lambda_1 + a_{13} > 0$,

$\lambda_2 + a_{23} < 0$, $\lambda_2 + a_{21} > 0$, $\lambda_3 + a_{31} < 0$, $\lambda_3 + a_{32} > 0$.

Стационарные состояния: $\xi_1 = (\pm 1, 0, 0)$, $\xi_2 = (0, \pm 1, 0)$, $\xi_3 = (0, 0, \pm 1)$, **координатные плоскости** – инвариантные пространства.



Пример гетероклинического цикла

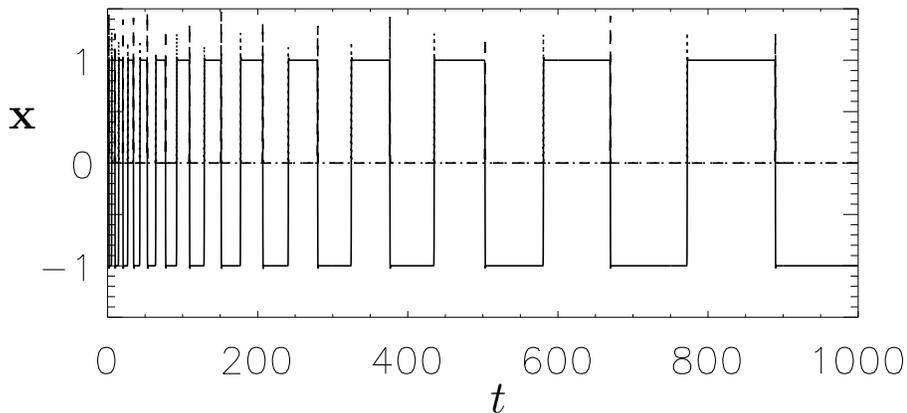
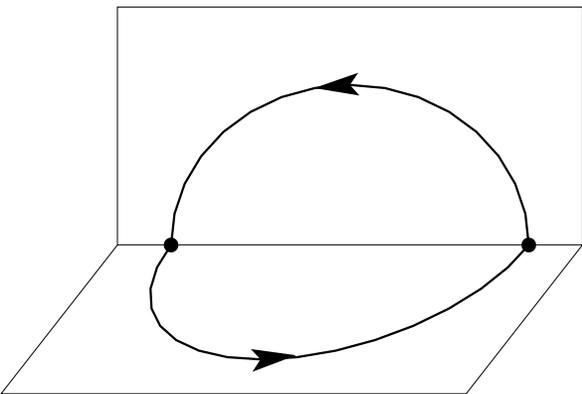
Динамическая система в \mathbb{R}^3 :

$$\dot{x}_1 = x_1(\lambda_1 + a_{11}x_1^2) + a_{12}x_2^2 + a_{13}x_3^2, \quad \dot{x}_2 = x_2(\lambda_2 + a_2x_1), \quad \dot{x}_3 = x_3(\lambda_3 + a_3x_1),$$

где $\lambda_1 > 0$, $a_{11} < 0$, $\lambda_2 - a_2\lambda_1(-a_{11})^{-1/2} > 0$, $\lambda_2 + a_2\lambda_1(-a_{11})^{-1/2} < 0$,
 $\lambda_3 - a_3\lambda_1(-a_{11})^{-1/2} < 0$, $\lambda_3 + a_3\lambda_1(-a_{11})^{-1/2} > 0$.

Стационарные состояния: $\xi_{\pm} = (\pm\lambda_1(-a_{11})^{-1/2}, 0, 0)$,

инвариантные плоскости – $(x_1, x_2, 0)$, $(x_1, 0, x_3)$.



Поведение траекторий вблизи гетероклинического цикла:

1. Переमेжаемость.
2. Наличие редких событий, экстремальных событий, критических переходов. Особый интерес представляет изучение переломных моментов.

Периодические орбиты вблизи гетероклинического цикла:

Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{f}(\mathbf{x}), \quad f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

где

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \eta(t), \quad \eta(t) - \text{белый шум},$$

или

$$\|\tilde{f}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\| < \epsilon.$$

Вблизи гетероклинического цикла могут существовать орбита с большим периодом или хаотический аттрактор.

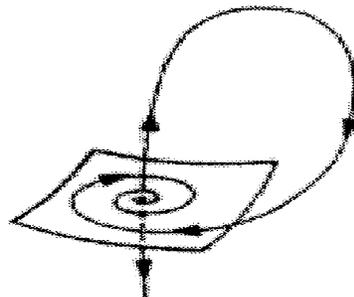
Пример гомоклинического цикла. Бифуркация Шильникова.

Динамическая система в \mathbb{R}^3 :

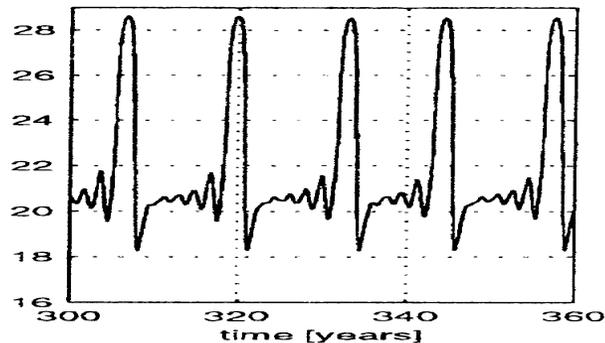
$$\dot{x}_1 = -\rho x_1 - \omega x_2 + F_1(\mathbf{x}), \quad \dot{x}_2 = \omega x_1 - \rho x_2 + F_2(\mathbf{x}), \quad \dot{x}_3 = \gamma x_3 + F_3(\mathbf{x}),$$

где $\rho > 0$, $\gamma > 0$, $F_j(0) = 0$ и $dF_j(0)/dx_i = 0$.

Предположим, что существует гомоклиническая траектория:



Если $-\rho + \gamma > 0$, то поведение траекторий вблизи гомоклинического цикла хаотическое:

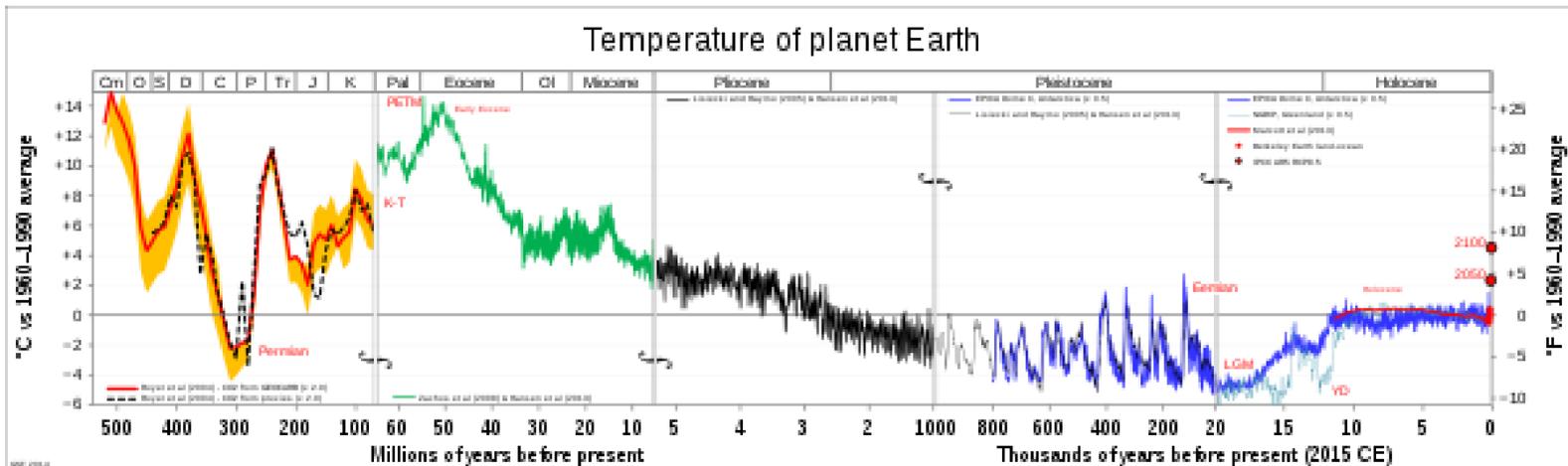


ПАЛЕОКЛИМАТОЛОГИЯ – наука об истории изменения климата Земли

Для реконструкции используют, например:

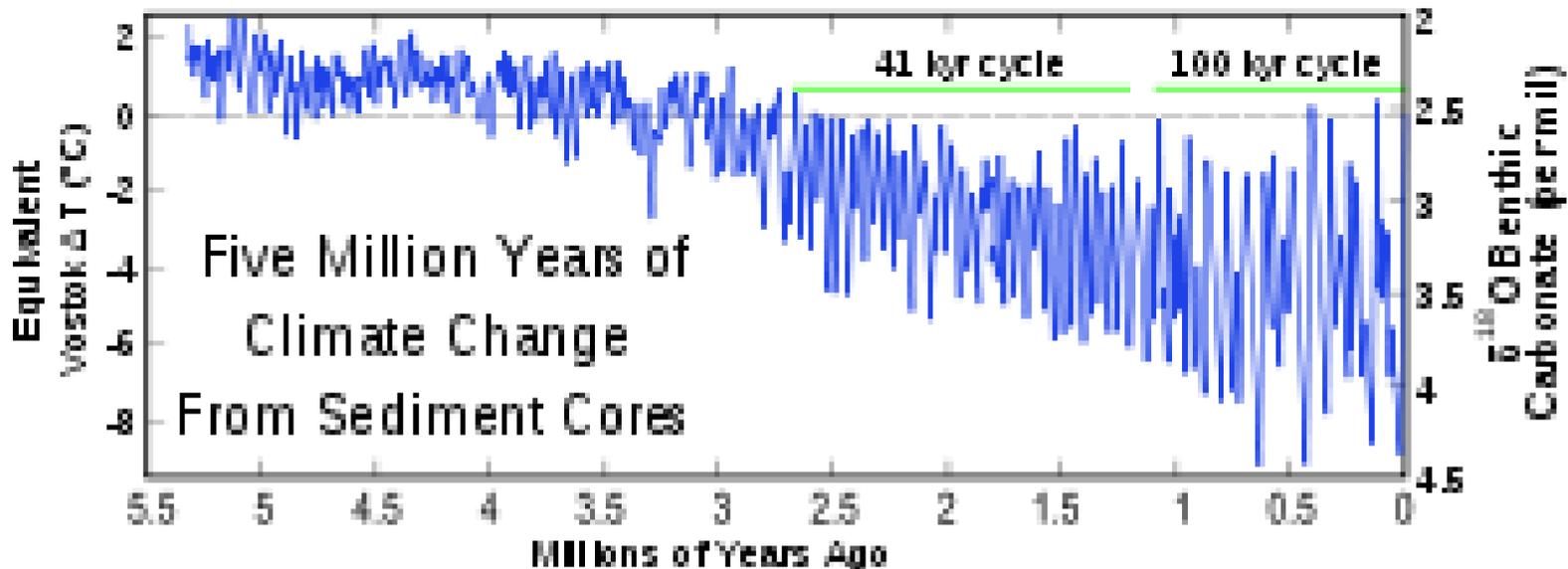
- Соотношение изотопов $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$ в раковинах ископаемых беспозвоночных
- Соотношение Ca:Mg, Ca:Sr в скелетах ископаемых организмов.
- Соотношение изотопов $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$ в ископаемых льдах.

Реконструкция:



Palaeotemperature graphs compressed together

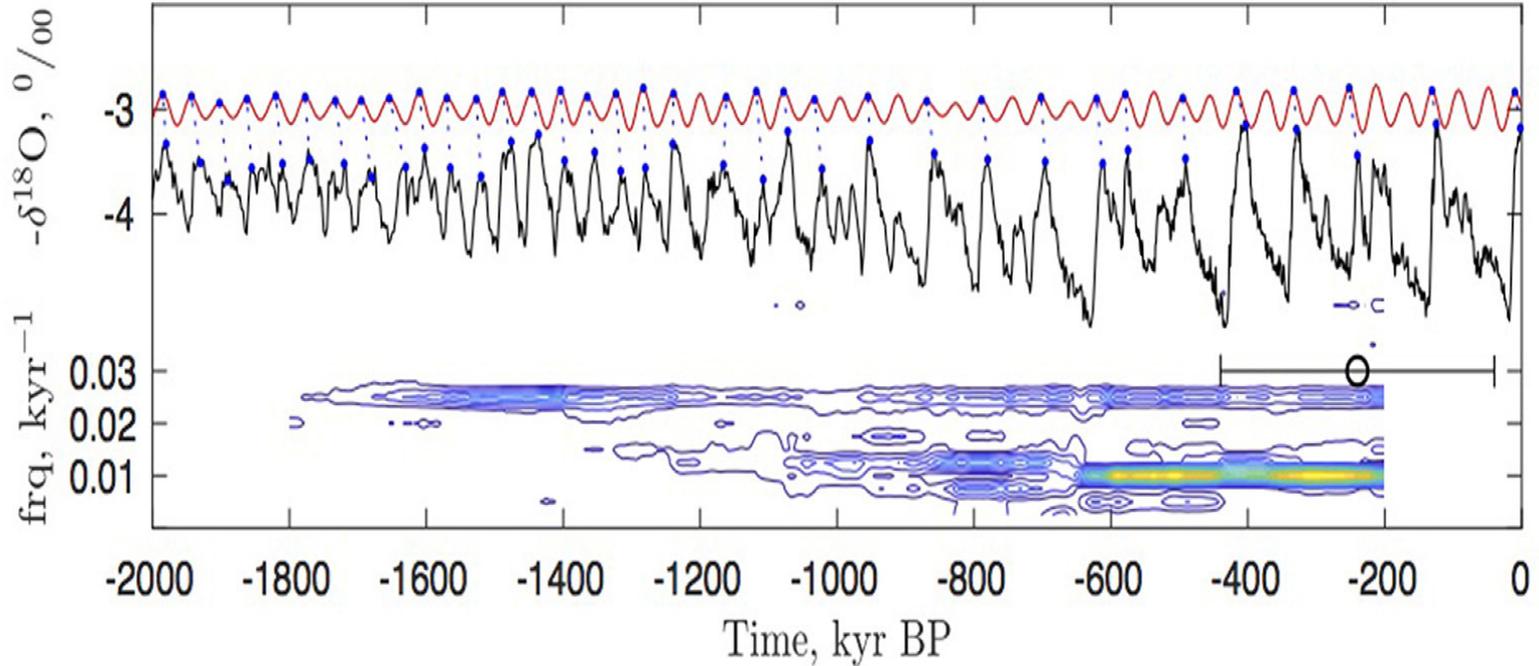
5 млн. лет:



Variations of cycle times, curves determined from ocean sediments.

2 млн. лет:

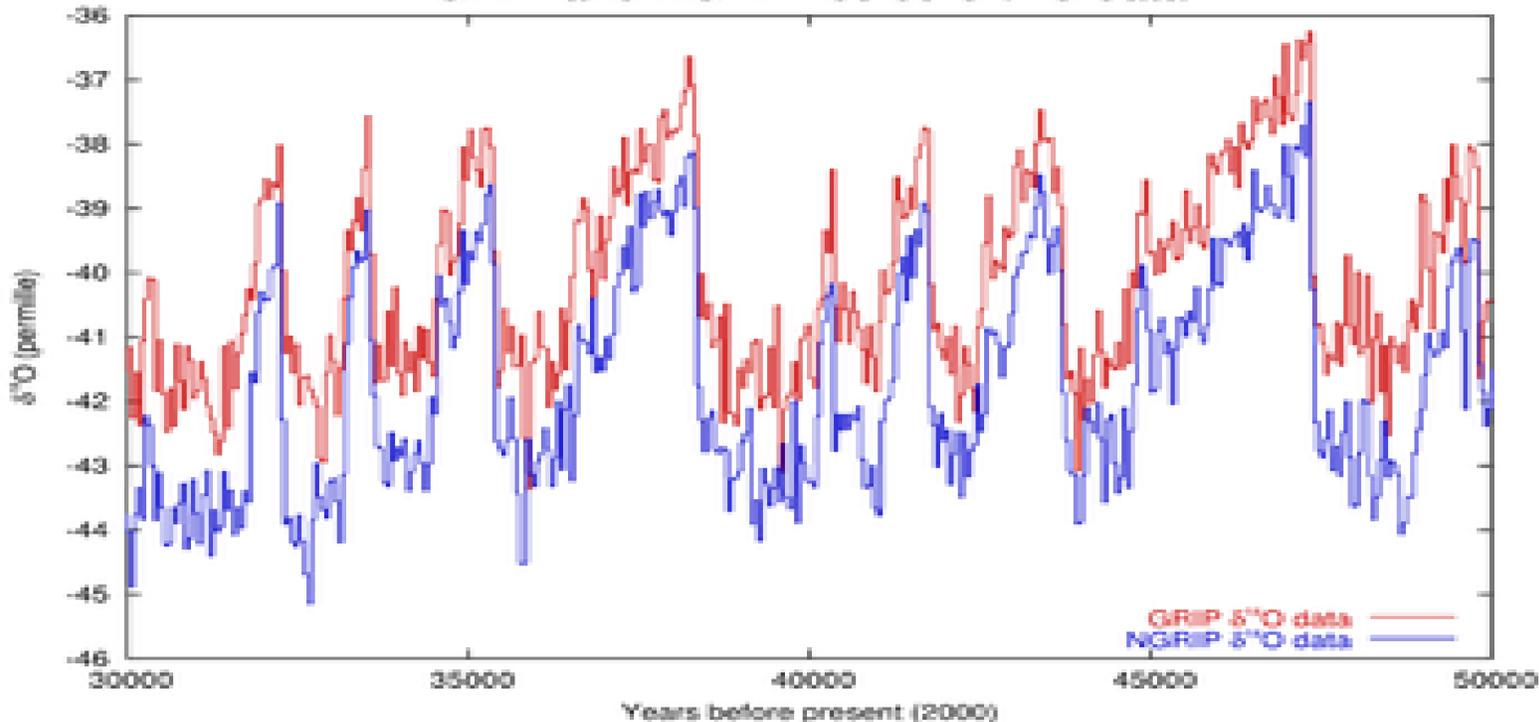
North GRIP members *Nature* **431** 2004; Ditlevsen, Ashwin *Front. Phys.* **6** 2018



События Дансгаара-Эшгера:

резкие потепления в северной Атлантике с интервалом, кратным 1470 годам.

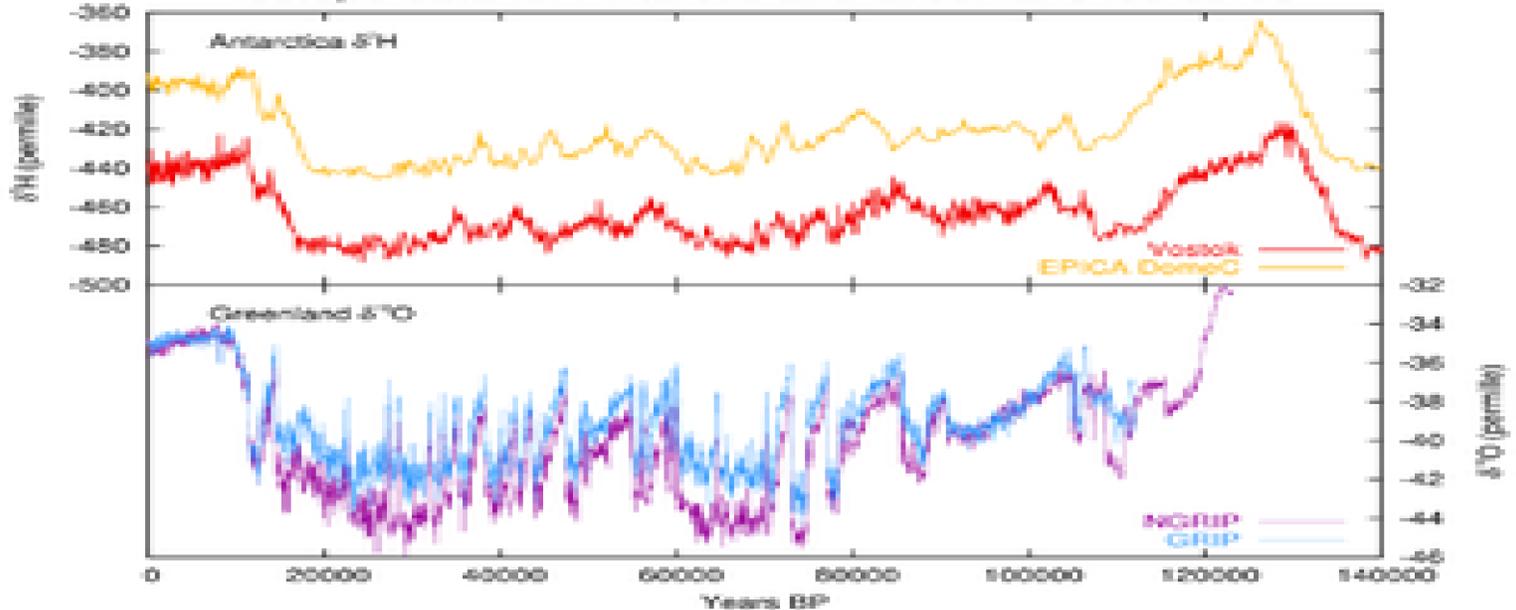
GRIP and NGRIP ice core $\delta^{18}\text{O}$ data



A closeup near 40 kyr BP, showing reproducibility between cores

Сравнение Арктики и Антарктиды:

Isotope data for Antarctic and Greenland ice cores



Temperature proxy from four ice cores for the last 140,000 years, clearly indicating the greater magnitude of the D-O effect in the northern hemisphere

МОДЕЛИ КЛИМАТА НА БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ:

Динамическая система становится **неавтономной**,

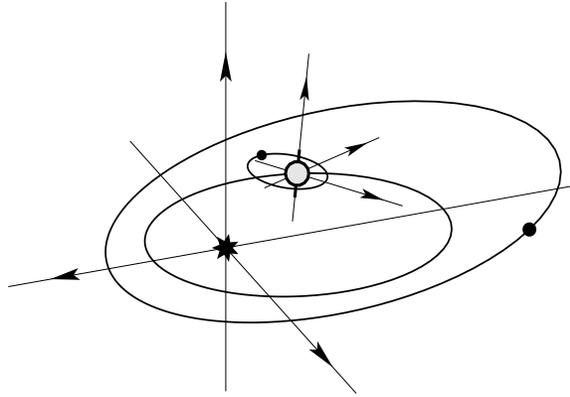
$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t),$$

поскольку со временем

- Изменяется количество солнечной энергии.
- Изменяется тепловой поток из глубин Земли.
- Изменяются размеры и расположение материков и океанов.
- Изменяются эксцентриситет орбиты Земли и положение ее оси вращения.

ЦИКЛЫ МИЛАНКОВИЧА:

изменения климата за счет изменения наклона оси вращения и эксцентриситета орбиты Земли.



- Прецессия оси вращения Земли, период 26000 лет.
- Изменение угла между осью вращения и нормалью к плоскости орбиты Земли от 22° до 24.5° , период 41000 лет.
- Изменение эксцентриситета орбиты Земли от 0.00005 до 0.07, период 93000 лет.

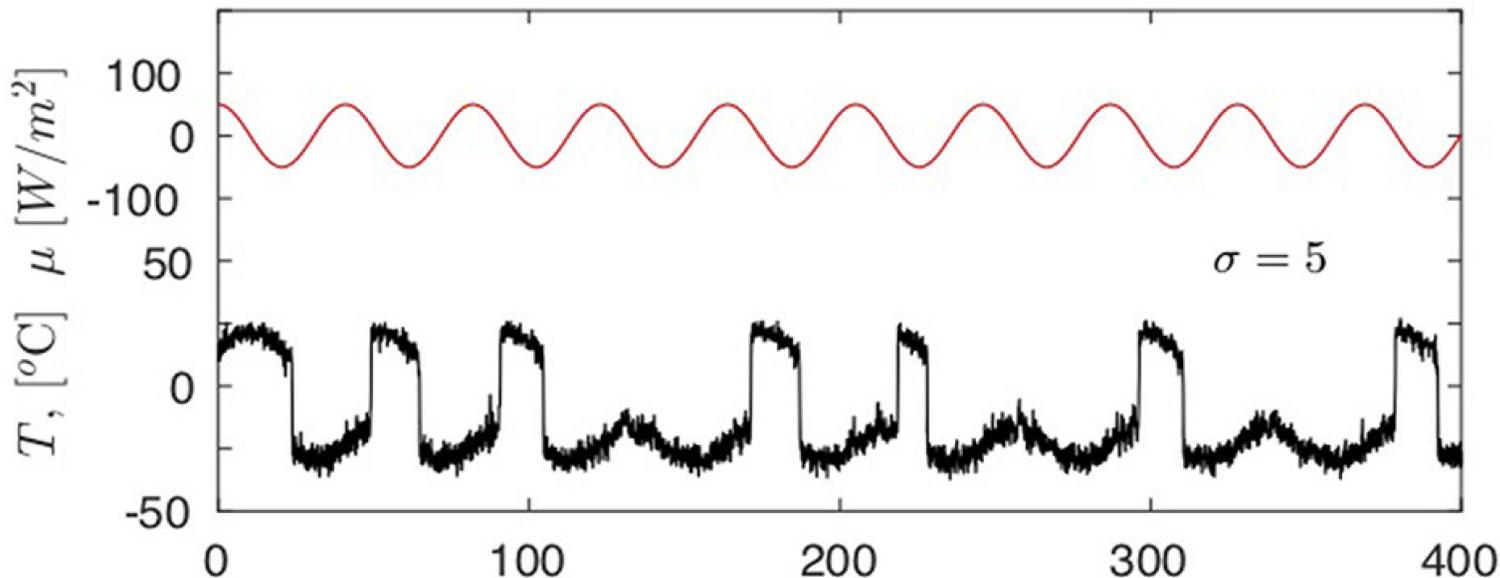
Самая простая модель

(Budyko *Tellus* **21** 1969; Sellers *J.Appl.Meteorol.* **8** 1969)

Баланс энергии: $c\dot{T} = (1 - \alpha(T))S - g(T)\delta T^4 + \sigma\eta(t)$,

T - средняя температура, $S = S_0 + \mu_0\omega t$ - энергия Солнца, $g(T)$ - фактор отражения (наличие CO₂), η - шум.

Зависимость температуры от времени:

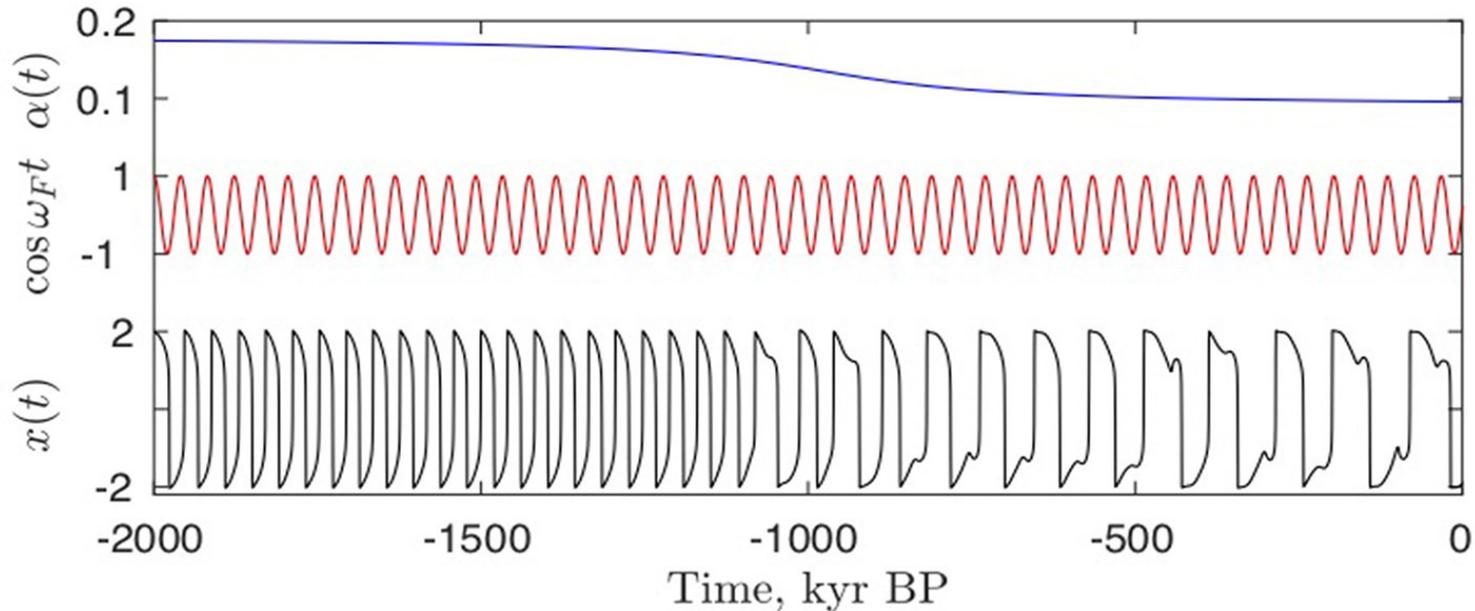


Простая модель

Crucifix *Phil.Trans.R.Soc.A* **370** 2012; De Saedeleer et al *Clim.Dyn.* **40** 2013

x - температура, $y = \dot{x}$. Уравнения: $\dot{y} = -g(x)$, $\dot{x} = \alpha x + F(t)$,
 $g(x) = -\gamma(1 - x^2)$, α -константа, $F(t)$ -энергия Солнца.

Зависимость температуры от времени. Резонансы 1:1, 2:1, 3:1



Простая модель

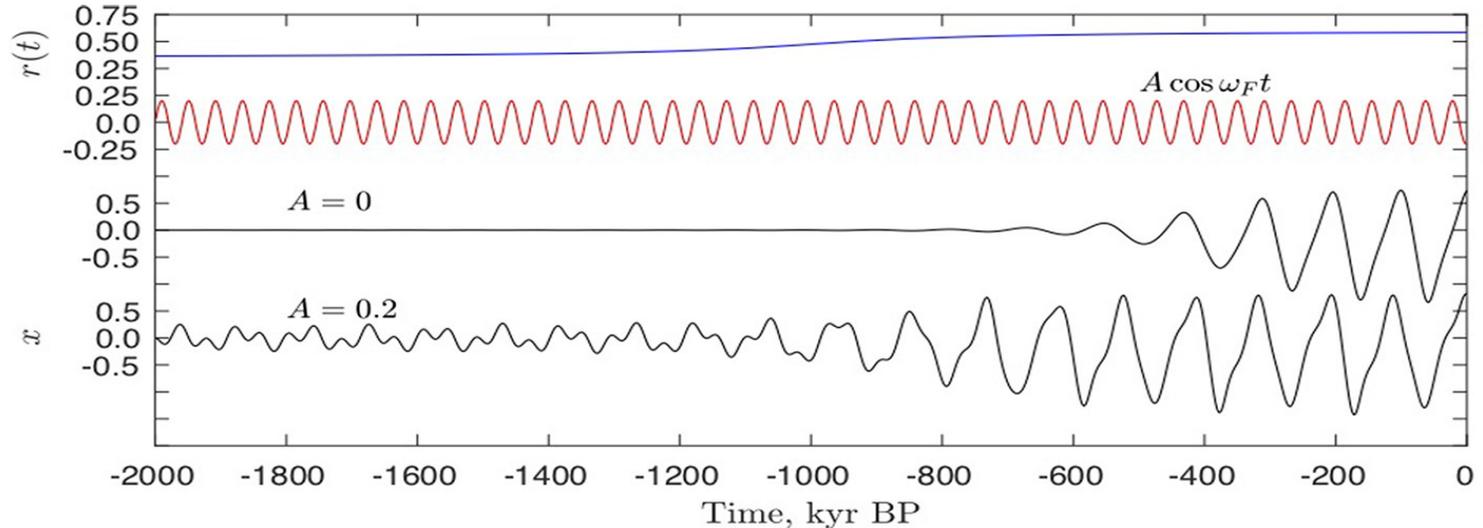
Maasch, Saltzman *J.Geophys.Res.* **95** 1990; Engler *Physica D* **359** 2017

x - объем льда, y - концентрация CO_2 , z - температура океана.

$$\dot{x} = -x - y - I(t), \quad \dot{y} = -px + ry + sz^2 - yz^2, \quad \dot{z} = -q(x + z),$$

$I(t) = A \cos \omega_F t$ - энергия Солнца, p, q, r, s - параметры.

Зависимость температуры от времени.



Простая модель

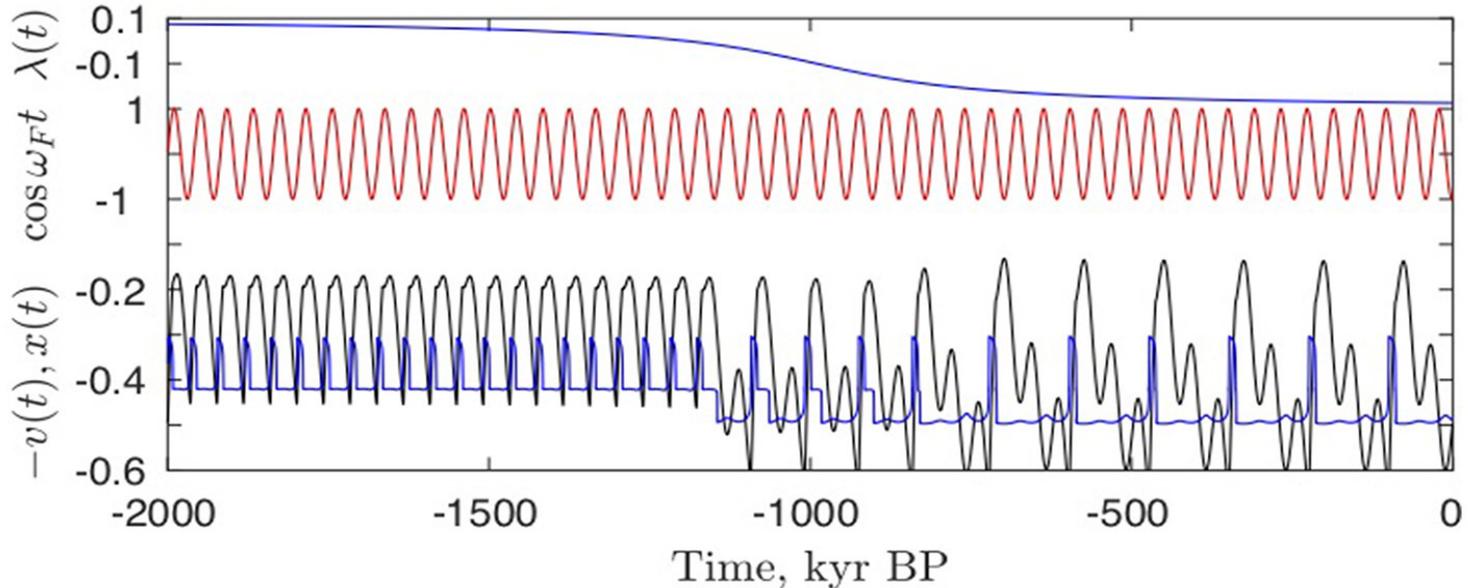
Paillard *Nature* **391** 1998; Ashwin, Ditlevsen *Clim.Dyn.* **45** 2015

x - температура, ν - объем льда. Уравнения

$$\dot{\nu} = G(x, \nu) - I(t), \quad \dot{x} = H(x, \nu, \lambda),$$

где $I(t) = A \cos \omega_F t$ - энергия Солнца.

Зависимость температуры от времени. Резонансы 1:1, 2:1, 3:1



Простая модель

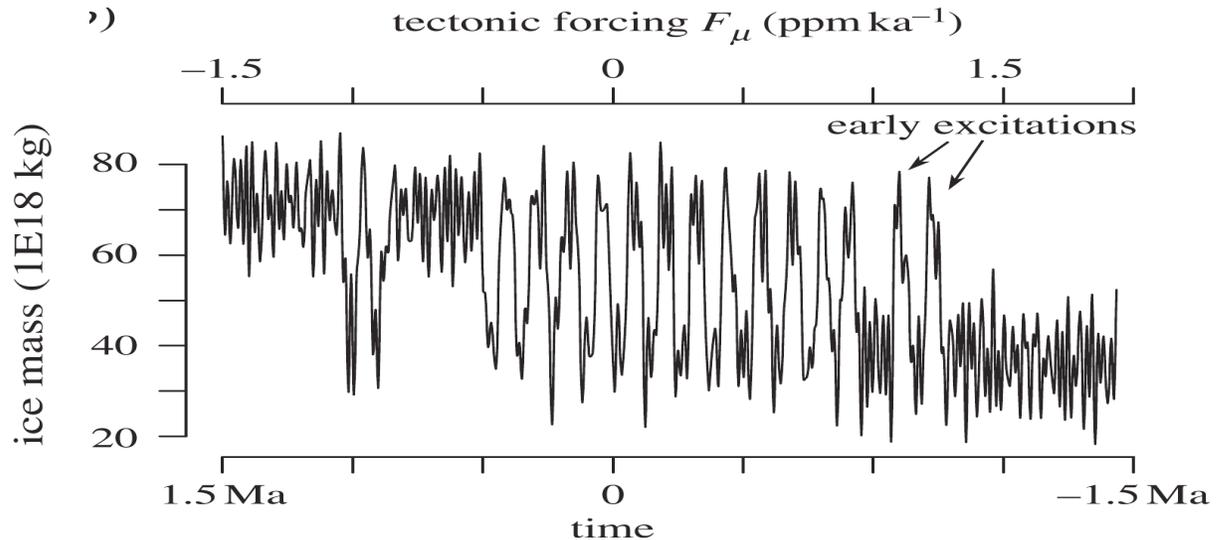
Sattzman, Maasch *Trans.R.Soc.Ed.* **81** 1991; Crucifix *Phil.Trans.R.Soc.A* **370** 2012

I - масса льда; μ - концентрация CO_2 ; θ - температура океана.

$$\dot{I} = \alpha_1 - (c\alpha_2)\mu - \alpha_3 I - k_\theta \alpha_2 \theta - k_R \alpha_2 F_I(t),$$

$$\dot{\mu} = \beta_1 - (\beta_2 - \beta_3 \mu + \beta_4 \mu^2)\mu - \beta_5 \theta + F_\mu(t), \quad \dot{\theta} = \gamma_1 - \gamma_2 I - \gamma_3 \theta,$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i > 0$ - константы, $F_I(t), F_\mu(t)$ - внешние силы.



Модель событий Дансгаара-Эшгера

Boers et al *PNAS* **115** 2018

Переменные: $0 \leq C \leq 1$ - площадь льдов; I_G - содержание изотопа ^{18}O в Гренландии; T_G - температура в Гренландии; T_{NAW} - температура в северной Атлантике; ψ - интенсивности Атлантической меридиональной циркуляции (Atlantic meridional overturning circulation); I_A - содержание изотопа ^{18}O в Антарктиде.

Уравнения: $\dot{T}_G = -p_0(T_G - T_G^*) + 10p_0T_{NAW}\Theta(T_{NAW})(1 - C),$

$\dot{T}_{NAW} = -p_0(T_{NAW} - T_{NAW}^*) - 10p_0T_{NAW}\Theta(T_{NAW})(1 - C),$

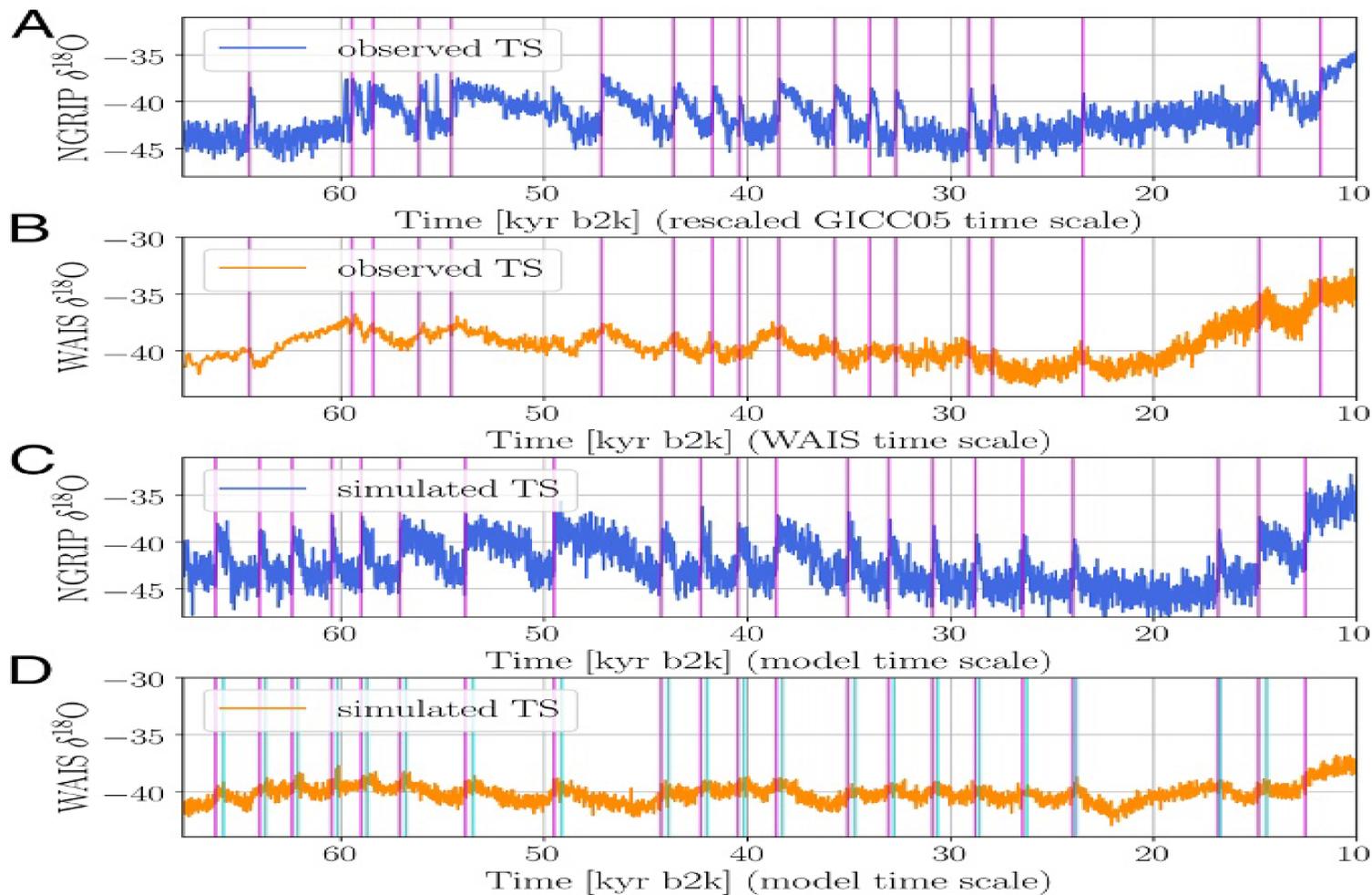
$\dot{\psi} = \psi - \psi^3 - p_0(T_{NAW} - \tau/2), \dot{I}_A = -(I_A - (I_A - \psi)),$

$\dot{C} = (s_1 \text{ if } C < \bar{C}; s_2 \text{ otherwise}),$

$I_G(t + 1) = I_G^* + p_1T_G(t) + p_2(1 - C(t)) + p_3\eta(t).$

$(T_G^*, T_{NAW}^*, I_G^*)$ - стационарное состояние, Θ - функция Хевисайда, p_j - константы, $\eta(t)$ - белый шум.

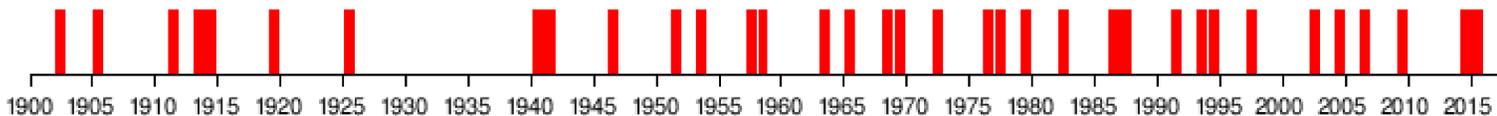
Сравнение наблюдений и модели



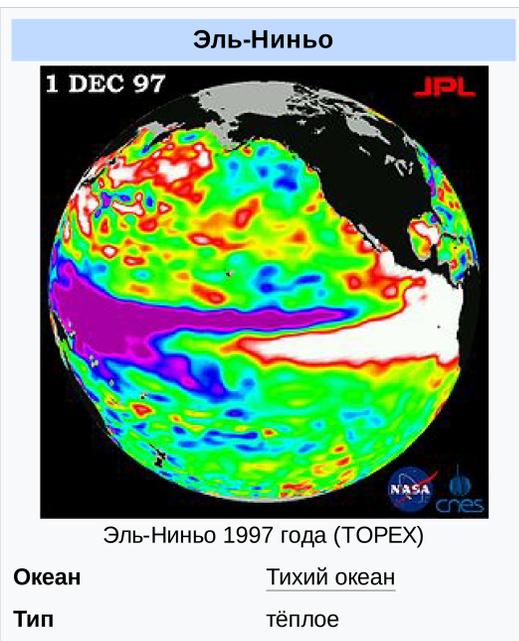
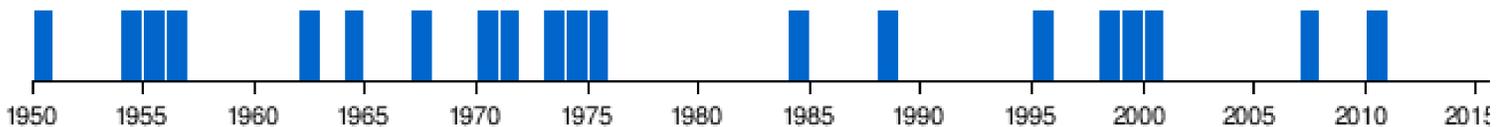
El Niño / La Niña -

нерегулярные изменения температуры поверхностного слоя воды в экваториальной части Тихого океана. Изменяется атмосферная циркуляция и океанические течения, что оказывает существенное влияние на климат планеты. Характерное время между событиями от 3 до 8 лет.

El Niño



La Niña



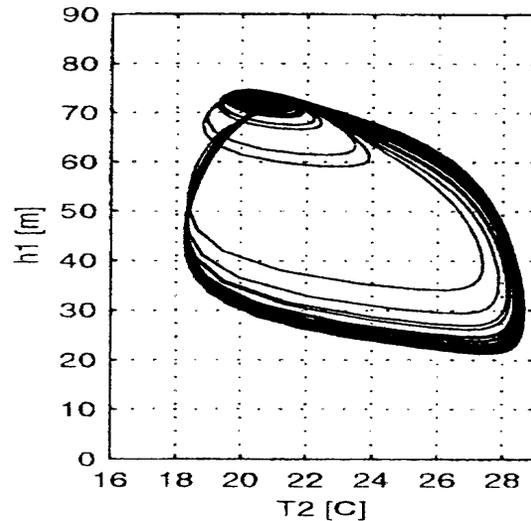
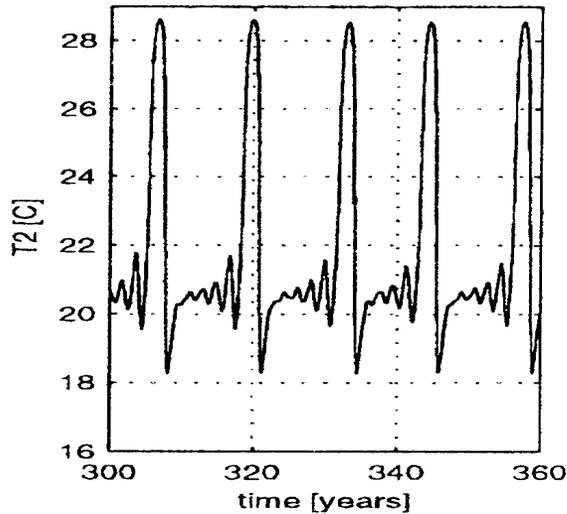
Модель El Niño

Timmermann, Jin, Abshagen *J.Atmos.Sci.* **60** 2002

T_1 - температура воды в северном полушарии, T_2 - в южном.

$$\dot{T}_1 = -\alpha(T_1 - T_2) - 2u(T_2 - T_1)/L, \quad \dot{T}_2 = -\alpha(T_2 - T_1) - w(T_2 - T_{sub})/H,$$
$$2u/L = \epsilon\beta\tau, \quad w/H = \zeta\beta\tau, \quad \tau = \mu(T_1 - T_2)[\gamma \cos(\omega t) + \sigma\xi - 1]/\beta,$$

$\sigma\xi$ - белый шум, α, β, \dots - параметры.



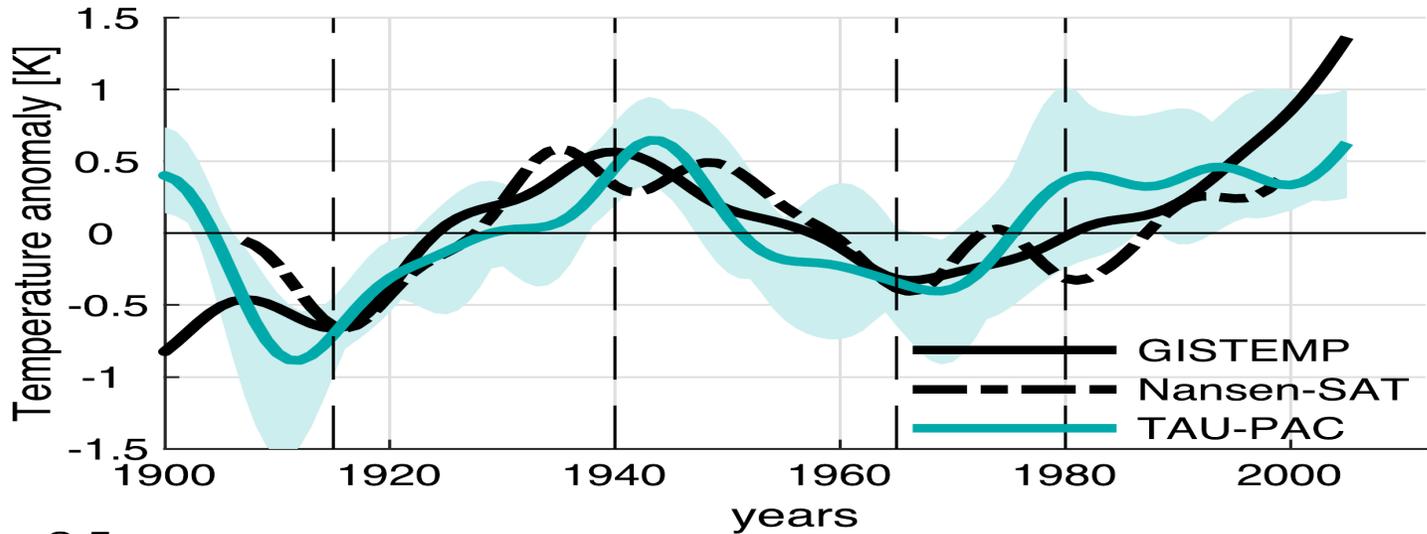
Norwegian Earth System Model (NorESM)

Svendsen et al *Clim.Dyn.* **57** 2021; Bentsen et al *Geosci.Mod.Dev.* **6** 2013

УрЧП: эволюция атмосферы, океана, ледяного покрова.

Северное полушарие.

Температура в Арктике:



GISTEMP, Nansen-SAT – результаты наблюдений, TAU-PAC – расчеты

Баротропная модель атмосферы.

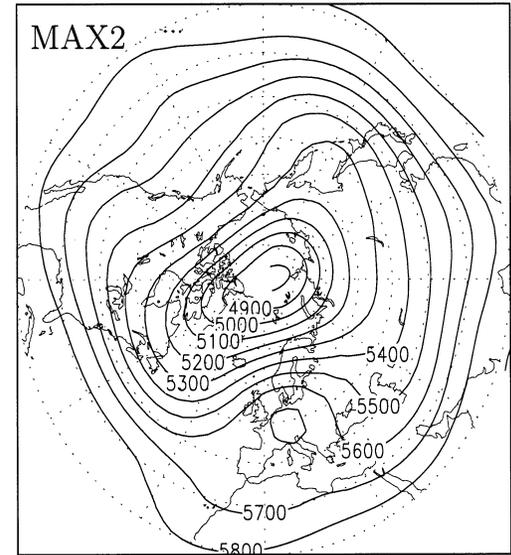
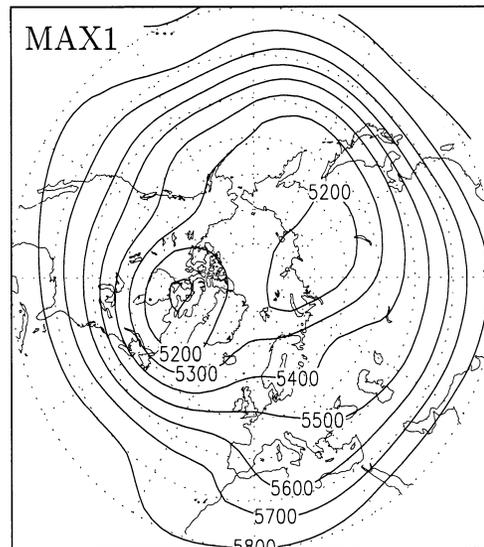
Crommelin *J.Atmos.Sci.* **80** 2003; Selten *J.Atmos.Sci.* **52** 1995

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi = -\mathcal{J}(\psi, \xi + f + h) + k_1\xi + k_2\Delta^3\xi + \xi^*,$$

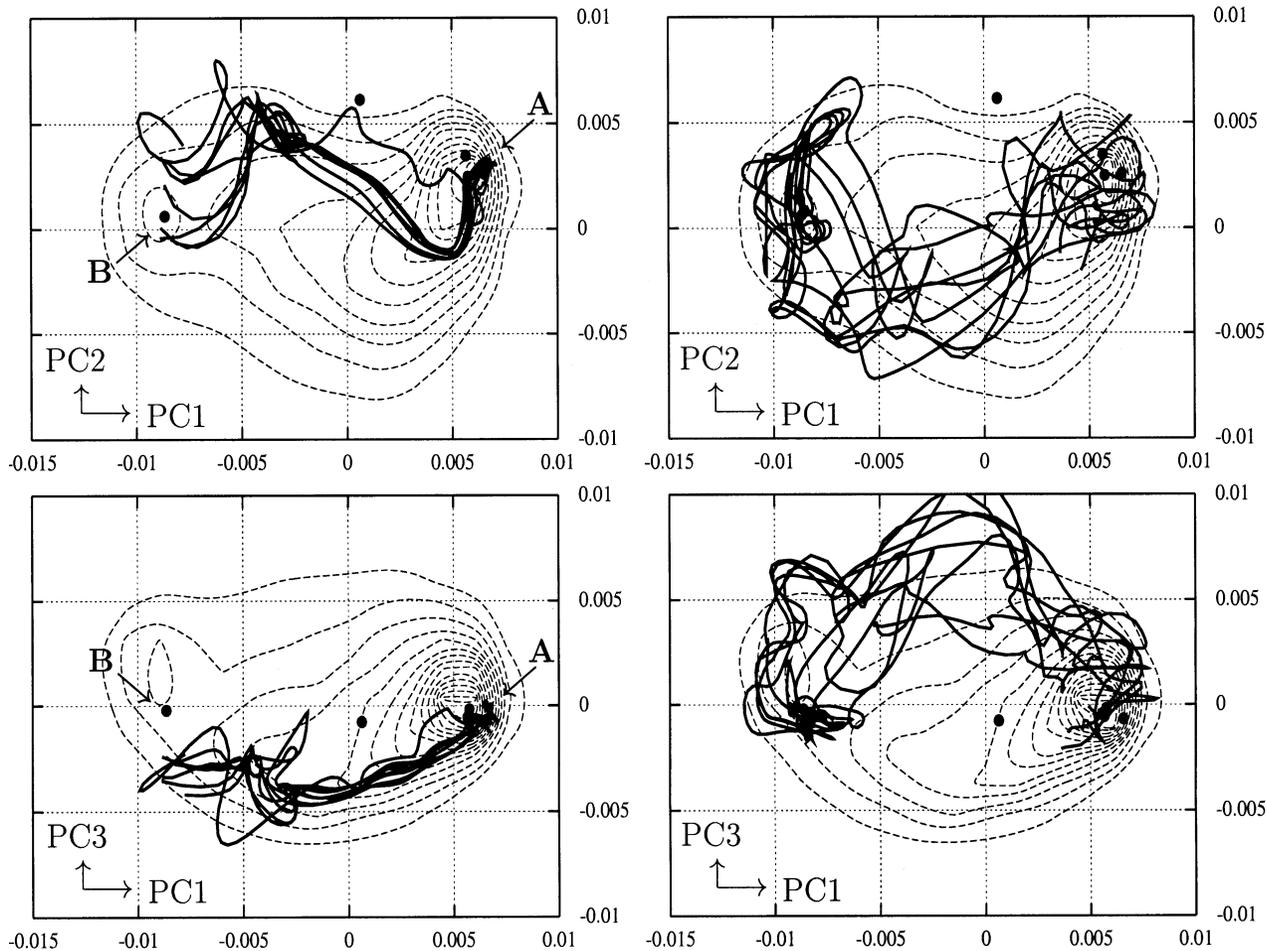
где $\xi(t, \lambda, \phi)$ - завихренность, $\psi = \Delta\xi$, f - параметр Кориолиса, h - высота, ξ^* - сила (получена из наблюдений),

$$\mathcal{J}(A, B) = (1/\cos\phi)\partial A/\partial\lambda\partial B/\partial\phi - \partial A/\partial\phi\partial B/\partial\lambda.$$

Стационарные
состояния:



Проекции траекторий:

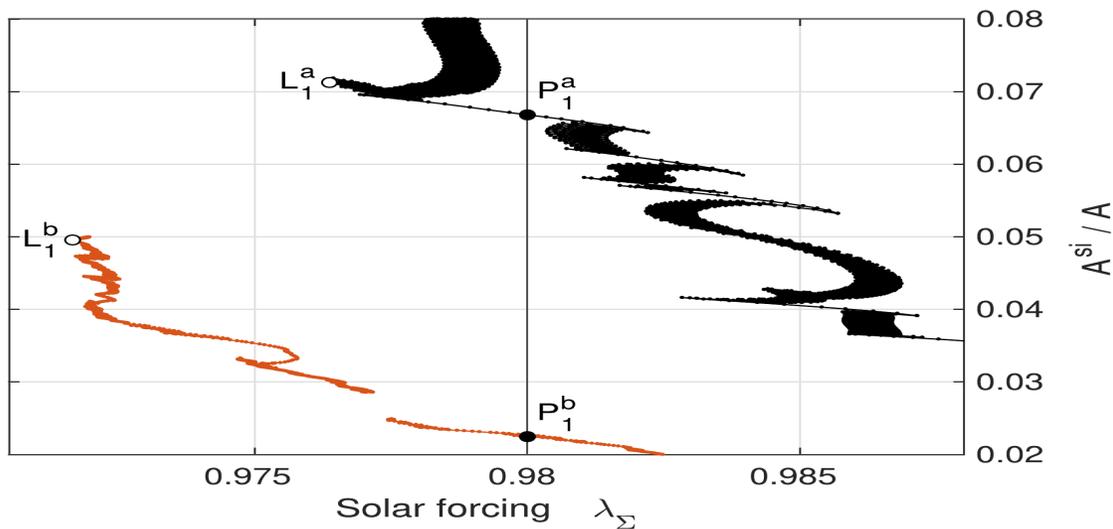


I-EMIC (Earth System Model of Intermediate Complexity)

Mulder et al *Int.J.Bif.Chaos* **31** 2021

3-мерные УрЧП: эволюция атмосферы, океана, ледяного покрова, температуры суши, коэффициент отражения.

Бифуркационная диаграмма:



A^{si} – площадь льдов.

Заключение.

- Представленные модели объясняют некоторые из наблюдаемых явлений.
- Остается большое количество вопросов, ответ на которые еще не найден.

Подвигина Ольга Михайловна

Доктор физико-математических наук

Главный научный сотрудник Института теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН

olgap@mitp.ru