



Перемещение северного магнитного полюса
из Канады в Сибирь:
экскурсия или инверсия?



В. Желиговский

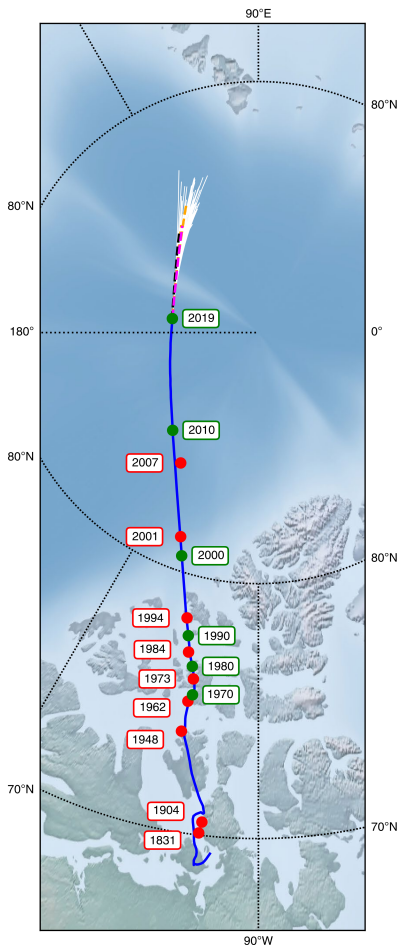
ИНСТИТУТ ТЕОРИИ ПРОГНОЗА ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ РАН

vlad@mitp.ru

Проект финансируется РФФ, грант 22-17-00114



Движение “северного” геомагнитного полюса



- Первое определение положения магнитного полюса 1831 г. (Росс), 1904 г. (Амундсен). (Где магнитная стрелка вертикальна?)
- Двигается в сторону Сибири.
- Скорость 1831-1990 гг. 0-15 км/год.
- Ускорение в 1990-2005 гг. до 50-60 км/год.
- Прошел на минимальном расстоянии 390 км от географического полюса.
- Интенсивность геомагнитного поля с 1831 г. уменьшается в среднем на 5% за 100 лет.

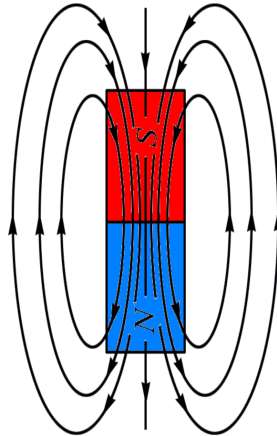
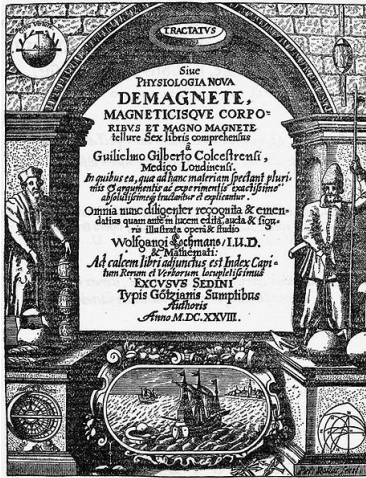
Livermore P.W., Finlay C.C., Bayliff M. Recent north magnetic pole acceleration towards Siberia caused by flux lobe elongation. *Nature Geoscience*, 13, 387-391 (2020).

Fig. 1 | Historical movement and predicted future path of the north magnetic pole in stereographic projection. Solid blue shows the pole's evolution according to the COV-OBS.x1 (1840-1999) and CHAOS-6-x8 (1999-2019) geomagnetic field models, with green circles indicating recent decadal positions; red circles mark in situ measurements (1831-2007)^{4,13}. The international date line is shown by the dotted black line on the 180° meridian. Predictions (Methods) 2019-2029 are linear extrapolations from the World Magnetic Model Version 2 (ref. ⁹) in black, linear extrapolation from CHAOS-6-x8 in magenta, a purely diffusive model based on fitting geomagnetic secular variation over 2014-2019 in orange³¹ and frozen-flux evolution using an ensemble of large-scale flows^{20,21} in white.

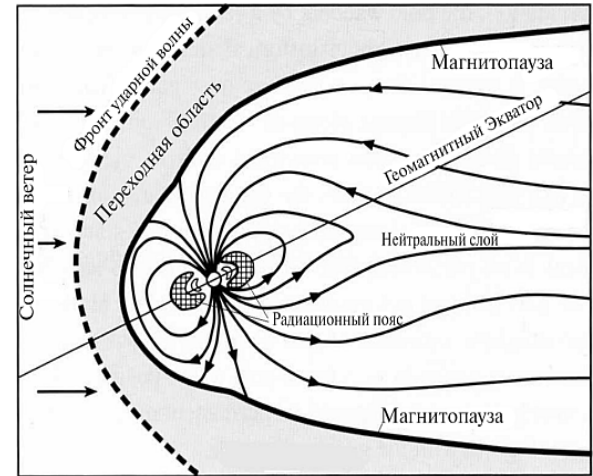
- По косвенным данным, уменьшение интенсивности геомагнитного поля началось не позднее 1600 г. Brown M., Korte M., Holme R., Wardinski I., Gunnarson S. Earth's magnetic field is probably not reversing. Proc. National Ac. Sci. (PNAS) 115, 5111-5116 (2018).
- Моделирование: движение магнитного полюса вокруг географического было хаотическим последние 7000 лет. Korte M., Manda M. Magnetic poles and dipole tilt variation over the past decades to millennia. Earth Planets Space 60, 937-948 (2008).

Защитная функция магнитного поля Земли

Магнитный диполь



Магнитосфера Земли

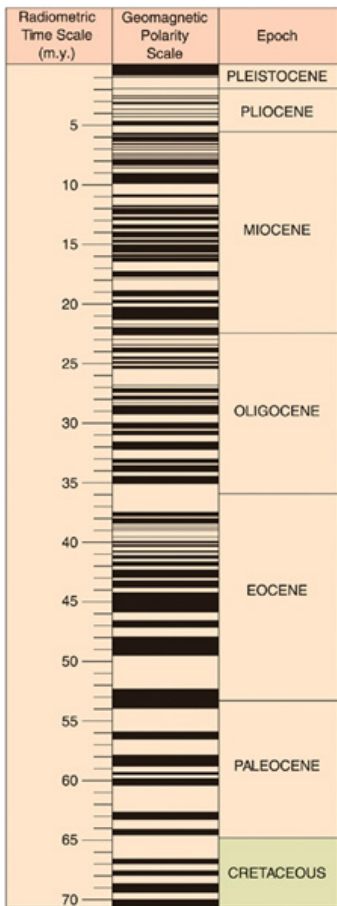


Gilbert W. De magnete. Gilbert club rev. Engl. transl. Chiswick Press, London 1900 (1600).

Влияние солнечного ветра:

- Инфраструктура (спутники, электроника)
- Биосфера (онкологические заболевания)
- Атмосфера (перенос газа в космическое пространство, разрушение озонового слоя)
- Полярные сияния





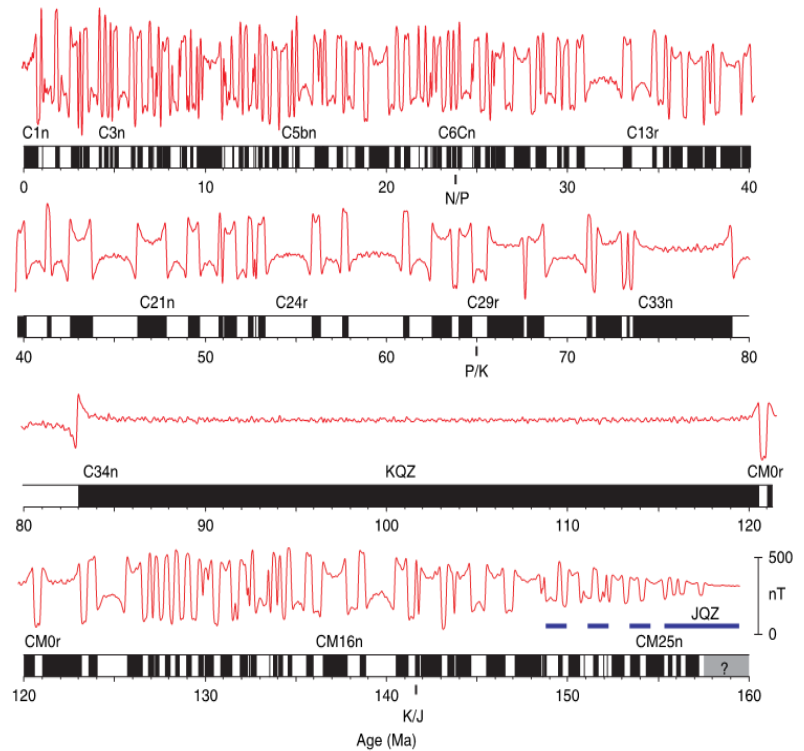
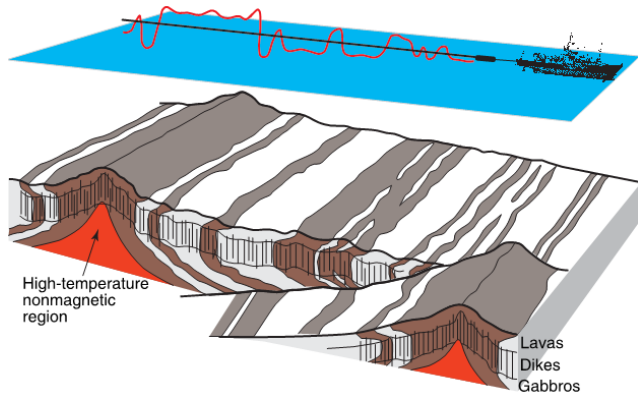
Инверсии магнитного поля Земли

- Заканчиваются изменением полярности диполя.
- Длительность инверсии $10^2 - 2 \times 10^4$ лет.
- Длительность *магнитных эпох* $2 \times 10^5 - 10^6$ лет.
- Длительность *суперхрон* до 4×10^7 лет.
- Последняя инверсия (смена эпох Матуяма-Брюнес) началась 795 Клет и закончилась 773 Клет назад.

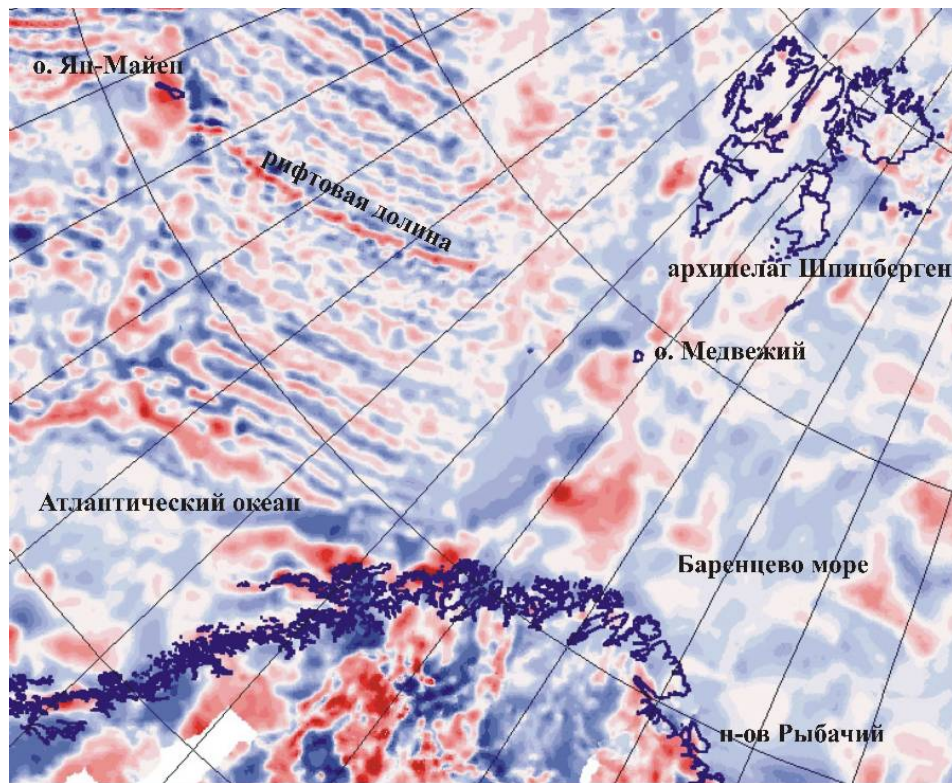
Singer B.S., Jicha B.R., Mochizuki N., Coe R.S. Synchronizing volcanic, sedimentary, and ice core records of Earth's last magnetic polarity reversal. *Science Advances*, 5, eaaw4621 (2019).

Haneda Yu., Okada M., Suganuma Yu., Kitamura T. A full sequence of the Matuyama-Brunhes geomagnetic reversal in the Chiba composite section, Central Japan. *Progress in Earth & Planetary Science*, 7, 44 (2020).

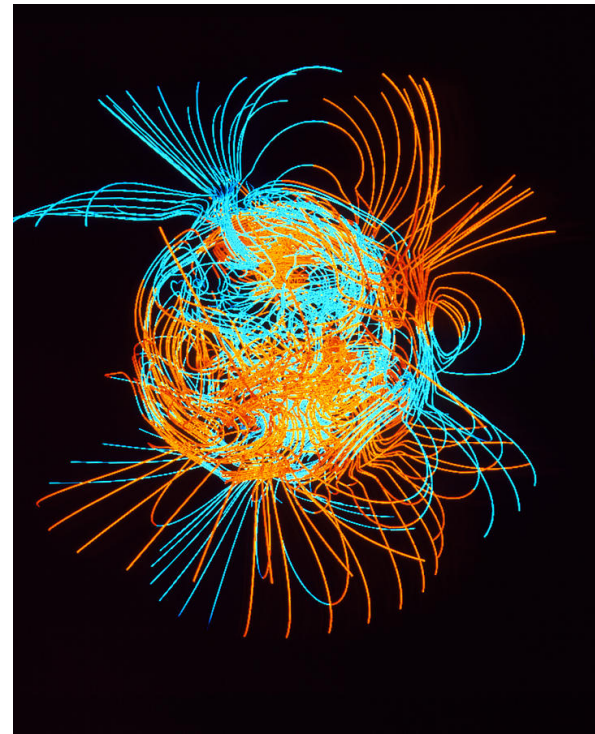
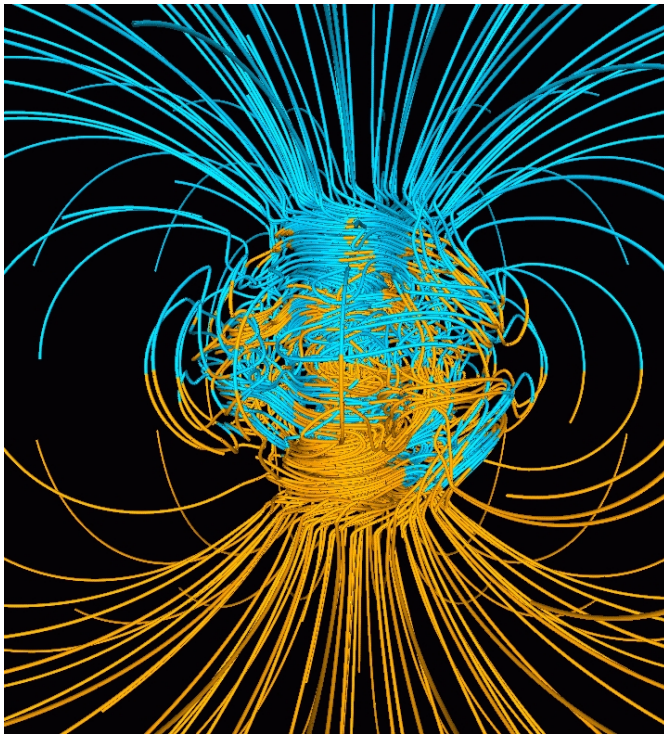
Появление полосовых магнитных аномалий при спрединге морского дна.



Gee J.S., Kent D.V. Source of oceanic magnetic anomalies and the geomagnetic polarity timescale. Treatise on Geophysics, 2nd ed., 5.12, 419-460 (2007).



Магнитные аномалии запада Баренцева моря и востока Атлантического океана. Мазарович А.О. Структура дна Мирового океана и окраинных морей России. М.: ГЕОС, 2005.



*Магнитные линии во время эпохи стационарной ориентации геомагнитного диполя (слева) и инверсии (справа).
Расчеты Gary Glatzmaier & Paul Roberts.*

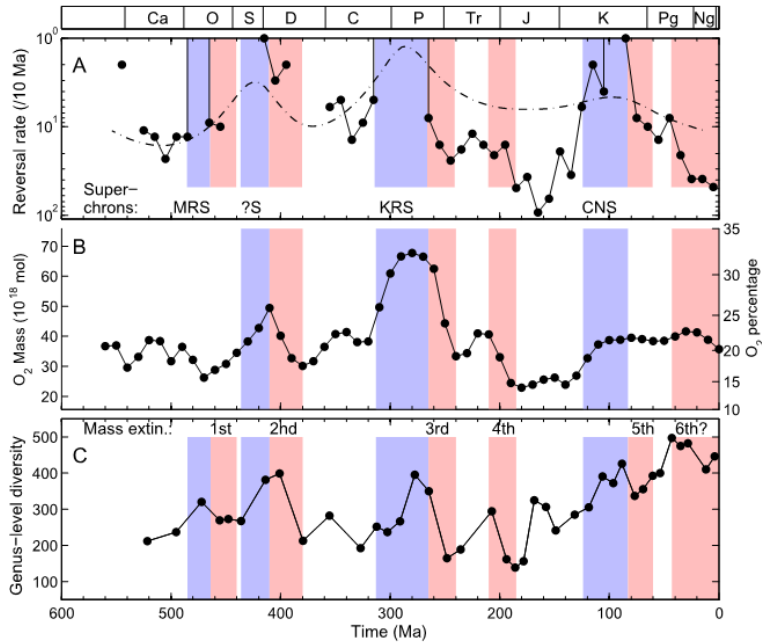
- “Согласно модели геомагнитного динамо, **дипольная составляющая** магнитного поля в момент инверсии **обнулится** и квадрупольная станет доминирующей, ... в период инверсии **поток высокоэнергичных частиц** может **возрасти не более, чем в три раза** на всей поверхности Земли и доза радиации не превысит допустимой для человека, ... изменение конфигурации магнитного поля **перераспределит области повышенной радиации** по поверхности Земли (сегодня это полюса Земли), что может негативно сказаться на здоровье людей в этих областях.”

Царева О.О., Попов В.Ю., Малова Х.В., Попова Е.П., Подзолко М.В., Зеленый Л.М.

Радиационная опасность на Земле и в околоземном пространстве в процессе инверсии магнитного поля. Океанологические исследования, 47 № 1, 129-131 (2019).

- Не связаны ли циклы массового вымирания видов периода 30 млн. лет (Raup D.M., Sepkoski J.J. Mass extinctions in the marine fossil record. Science, 215, 1501-1503 (1982).) и циклы возникновения магнитных инверсий такого же периода (Raup D.M. Magnetic reversals and mass extinctions. Nature, 314, 341-343 (1985).)?

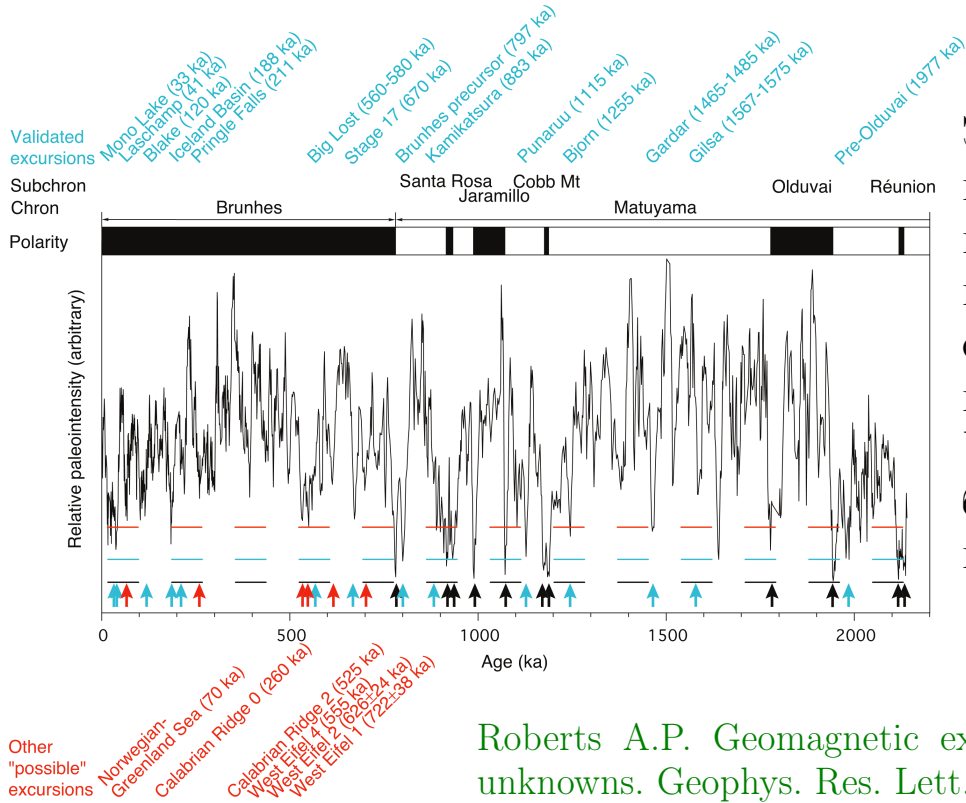
● Связь инверсий и содержания кислорода в атмосфере



А - частота инверсий (пунктир - по более ранней базе данных),
 В - процентное содержание O_2 .
 С - число морских видов
 Голубые блоки - суперхроны.
 Розовые блоки - 5 волн массового вымирания видов (бая волна не подтверждена).

Yong Wei et al. Oxygen escape from the Earth during geomagnetic reversals: Implications to mass extinction. *Earth and Planetary Science Lett.* 394, 94-98 (2014).

Магнитные экскурсии

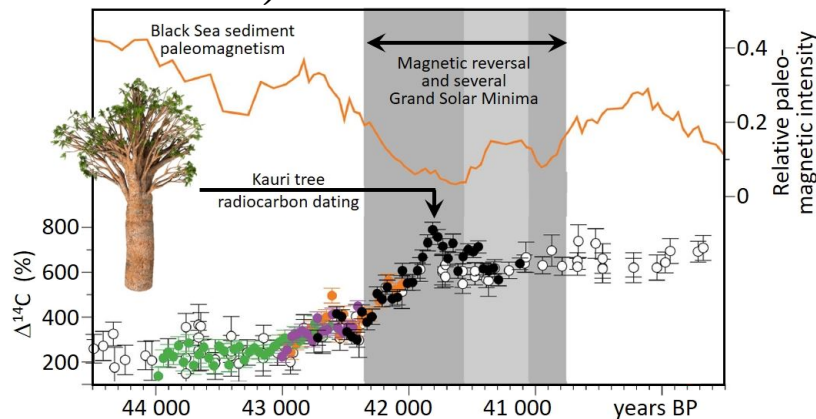


Экспедиции - относительно краткосрочные интенсивные вариации геомагнитного поля с изменением ориентации диполя на углы до $45^\circ - 180^\circ$. Частота \sim на порядок больше частоты появления инверсий.

Roberts A.P. Geomagnetic excursions: Knowns and unknowns. *Geophys. Res. Lett.*, 35, L17307 (2008).

“The answer to the Ultimate Question of Life, the Universe, and Everything” is 42.
Douglas Adams. *The Hitchhiker’s guide to the Galaxy*.

Экспедиция Лашамп (событие Адамса)



Alan Cooper et al. A global environmental crisis 42,000 years ago. *Science* 371, 811-818 (2021).

- Изменение полярности на противоположную на 500-800 лет.
- Падение интенсивности магнитного поля до уровня 28% во время периода противоположной полярности, 0-6% в предшествующий период.

Последствия события Адамса

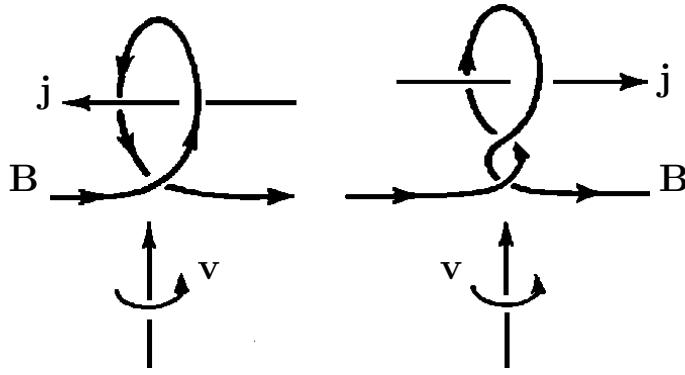
- Увеличение радиации, достигающей поверхности Земли.
- Увеличение содержания радиоактивных изотопов (^{14}C , ^{10}Be) в атмосфере.
- Уменьшение озонового слоя на 5-15%, увеличение на столько же потока ультрафиолета.
- “Полярное” сияние спускалось до сороковых широт, кратковременно при выбросах высокоэнергетических частиц на Солнце вплоть до экватора.
- Влияние на климат: возрастание облачности в низких широтах, засуха в Австралии.
- Годовые кольца в период минимального магнитного поля уже.
- Вымирание мамонтов и др. крупных млекопитающих (имело место и при последней экскурсии Озера Моно 34 Клет назад).
- Вымирание неандертальцев, распространение *Homo sapiens* по Европе.
- Переселение человека в пещеры (расцвет наскальной живописи) и использование охры для защиты от ультрафиолета.

Однако *Homo erectus* и, возможно, *Homo heidelbergensis* пережили смену эпох Матуяма-Брюнес!

Соответственно, вопросы:

- Каков(ы) наиболее вероятный(е) сценарий(и) процесса инверсии?
 - уменьшение магнитного поля до 0
и рост в противоположном направлении
 - изменение морфологии поля (“расщепление полюса на несколько”,
их “независимое движение в стороны противоположного
географического полюса” и “воссоединение там”)
 - “переворот” диполя на 180°
- Есть ли и каковы предвестники экскурсий и инверсий?
- Что сейчас происходит - экскурсия, инверсия или ничего?

Физика α -эффекта: “циклоническое” динамо Ю. Паркера



Вихри жидкости растягивают магнитные силовые линии (в силу “вмороженности”, если магнитной диффузией можно пренебречь) и создают петли. Петли создают ток.

В э.д.с. $\mathbf{v} \times \mathbf{b}$ появляется компонента, пропорциональная среднему полю \mathbf{B} .

После усреднения по “циклонам” закон Ома модифицируется: $\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} + \alpha \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}$.

Новое слагаемое $\alpha \mathbf{B}$ описывает магнитный α -эффект.

E.N. Parker. The generation of magnetic fields in astrophysical bodies.

I. The dynamo equations. Ap. J. 162 (1970) 665-674.

Электродинамика средних полей

M. Steenbeck, F. Krause, K.-H. Rädler. A calculation of the mean electromotive force in an electrically conducting fluid in turbulent motion, under the influence of Coriolis forces. *Z. Naturforsch.* 21a, 369-376 (1966).

F. Krause, K.-H. Rädler. Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory. Akademie-Verlag, Berlin, 1980.

K.-H. Rädler. Mean-field dynamo theory: early ideas and today's problems. В книге *Magnetohydrodynamics: evolution of ideas and trends*, edited by S. Molokov, R. Moreau & H.K. Moffatt. Springer, 2007, 55-72.

Магнитный α -эффект “прочно вошел в нашу жизнь”:

- используется для “объяснения” природных динамо, например, солнечного
- обсуждаются его свойства, например, связь с кинетической спиральностью течения
- предполагается его затухание при большом магнитном числе Рейнольдса (т.н. α -quenching), это сложность для объяснения природы астрофизических динамо;
- аналог в вычислительной математике - метод “симуляции больших вихрей” (LES);
- его (и не только магнитного) существование (как и вихревых магнитной диффузии и вязкости) доказано математически!

Значительное разделение масштабов: асимптотический подход

Магнитный α -эффект:

Брагинский С.И. О самовозбуждении магнитного поля при движении хорошо проводящей жидкости. ЖЭТФ, №3, 1084-1098 (1964).

Брагинский С.И. К теории гидромагнитного динамо. ЖЭТФ, 47, №6, 2178-2193 (1964).

Брагинский С.И. Кинематические модели гидромагнитного динамо Земли. Геомагнетизм и аэрономия, 4 №4, 732-747 (1964).

Брагинский С.И. Почти аксиально-симметричная модель гидромагнитного динамо Земли. I. Геомагнетизм и аэрономия, 15 №1, 149-156 (1975).

Roberts G.O. Spatially periodic dynamos. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A266, 535-558 (1970).

Roberts G.O. Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A271, 411-454 (1972).

Вишик М.М. Периодическое динамо. Математические методы в сейсмологии и геодинاميке (Вычисл. сейсмология, вып. 19). М.: Наука, 1986, 186-215.

Вишик М.М. Периодическое динамо. II. Численное моделирование и анализ геофизических процессов (Вычисл. сейсмология, вып. 20). М.: Наука, 1987, 12-22.

Анизотропный кинетический α -эффект (АКА-эффект):

Dubrulle B., Frisch U. Eddy viscosity of parity-invariant flow. Phys. Rev. A, 43, 5355-5364 (1991).

Магнитогидродинамический комбинированный α -эффект:

Желиговский В.А. О линейной устойчивости стационарных пространственно-периодических магнитогидродинамических систем к длиннопериодным возмущениям. *Физика Земли* №5, 65-74 (2003).

Двумасштабное кинематическое динамо

$\mathfrak{L} : \mathbf{B} \mapsto \eta \nabla^2 \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ - оператор магнитной индукции.

\mathbf{x} - быстрая пространственная переменная, $\mathbf{X} = \varepsilon \mathbf{x}$ - медленная,

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ периодически в кубе $\mathbb{T}^3 = [0, 2\pi]^3$,

ε - отношение пространственных масштабов: малый параметр задачи.

$\mathfrak{L}\mathbf{B} = \lambda\mathbf{B}$ - **задача кинематического динамо**, $\mathbf{B} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{B}_n(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \varepsilon^n$, $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varepsilon^n$.

Ситуация общего положения: $\dim \ker \mathfrak{L} = 3$.

Присутствует **магнитный α -эффект**: $\nabla_{\mathbf{X}} \times (\mathfrak{A} \langle \mathbf{B}_0 \rangle) = \lambda_1 \langle \mathbf{B}_0 \rangle$.

\mathfrak{A} - тензор магнитного α -эффекта

Если $\mathfrak{A} = 0$ (например, если $\mathbf{v}(-\mathbf{x}) = -\mathbf{v}(\mathbf{x})$),

то присутствует **магнитная вихревая (“турбулентная”) диффузия**:

$$\lambda_1 = 0, \quad \eta \nabla_{\mathbf{X}}^2 \langle \mathbf{B}_0 \rangle + \nabla_{\mathbf{X}} \times \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \mathfrak{D}_{mk} \frac{\partial \langle \mathbf{B}_0 \rangle_k}{\partial X_m} = \lambda_2 \langle \mathbf{B}_0 \rangle.$$

\mathfrak{D} - тензор магнитной вихревой диффузии

Итак, магнитные α -эффект и вихревая диффузия “бывают”.

Магнитные моды \mathbf{B} - короткомасштабные (имеющие периодичность течения) моды $\mathbf{b}(\mathbf{x})$, модулированные гармоникой Фурье: $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{b}(\mathbf{x})$, \mathbf{q} - постоянный вектор, $|\mathbf{q}| = \varepsilon$.

Анац возник(?) в физике твердого тела: Bloch F. Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern. Zeitschrift für Physik A. Hadrons and Nuclei, 52, 555-600 (1929).

Для плоскопараллельных и осесимметричных течений часто применялся в теории динамо.

Экспонента $\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})$ сокращается, задача динамо редуцируется в задачу о “блоховском спектре” в кубе периодичности \mathbb{T}^3 для \mathbf{b} :

$$\mathfrak{M}\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{q})\mathbf{b}, \quad \mathfrak{M} : \mathbf{b} \mapsto e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathfrak{L}(e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{b}) = \mathfrak{L}\mathbf{b} + 2i\eta(\mathbf{q}\cdot\nabla)\mathbf{b} - \eta|\mathbf{q}|^2\mathbf{b} + i\mathbf{q}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{b}).$$

$\max_{\mathbf{q}}\gamma(\mathbf{q})$ достаточно найти в параллелепипеде $\mathbb{Q} = \{\mathbf{q} \mid 0 \leq q_1 \leq 1/2, |q_2| \leq 1/2, |q_3| \leq 1/2\}$.

$\gamma(\mathbf{q}) = \text{Re}\lambda(\mathbf{q})$ - инкремент роста моды.

$\mathfrak{M}^* : \mathbf{b} \mapsto e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathfrak{L}^*(e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{b}) = \mathfrak{L}^*(\mathbf{b}) + 2i\eta(\mathbf{q}\cdot\nabla)\mathbf{b} - \eta|\mathbf{q}|^2\mathbf{b} - i\mathbf{v}\times(\mathbf{q}\times\mathbf{b})$ (сопряжен к \mathfrak{M});

$\mathfrak{L}^* : \mathbf{b} \mapsto \eta\nabla^2\mathbf{b} - \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{b})$ (сопряжен к \mathfrak{L}).

Когда \mathfrak{M} имеет собственное значение λ , \mathfrak{M}^* имеет собственное значение $\bar{\lambda}$.

Нормировка \mathbf{b}^* - собственной функции \mathfrak{M}^* : $(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{b}}^*) = 1$, (\cdot, \cdot) - скалярное произведение в $L_2(\mathbb{T}^3)$.

$$\frac{\partial\gamma}{\partial q_n} = -2\eta \text{Im} \left(\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial x_n}, \bar{\mathbf{b}}^* \right) - 2\eta q_n - \text{Im}(\mathbf{v}\times\mathbf{b}, \bar{\mathbf{b}}^*\times\mathbf{e}_n).$$

Вычислительные эксперименты:

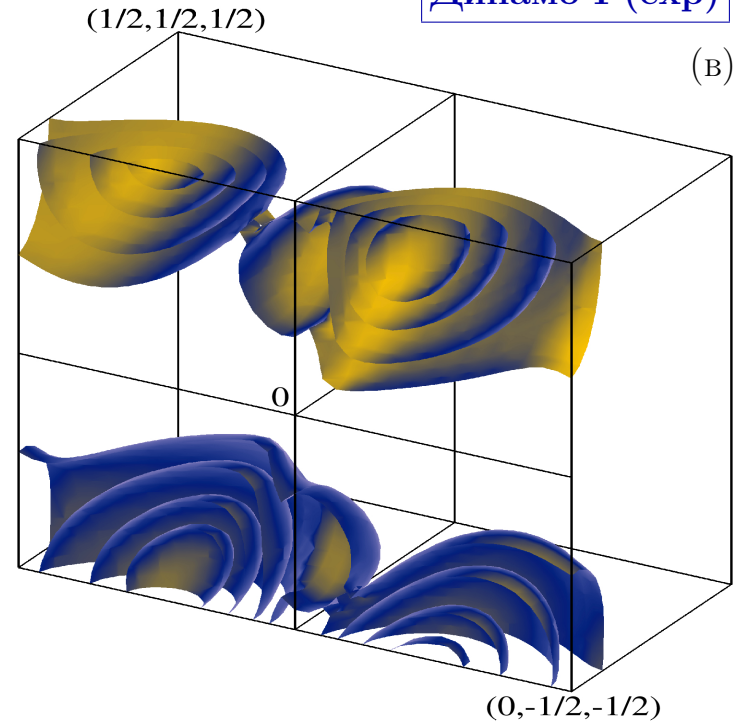
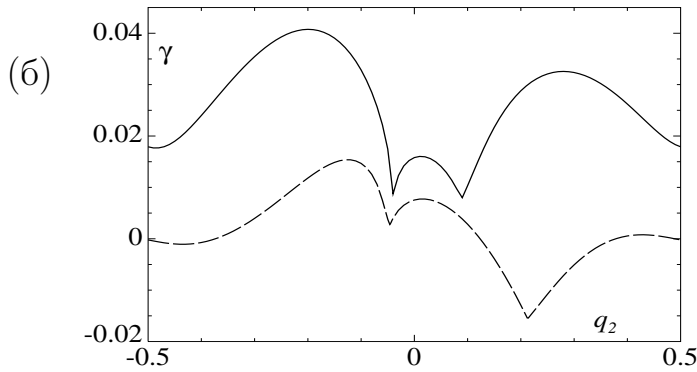
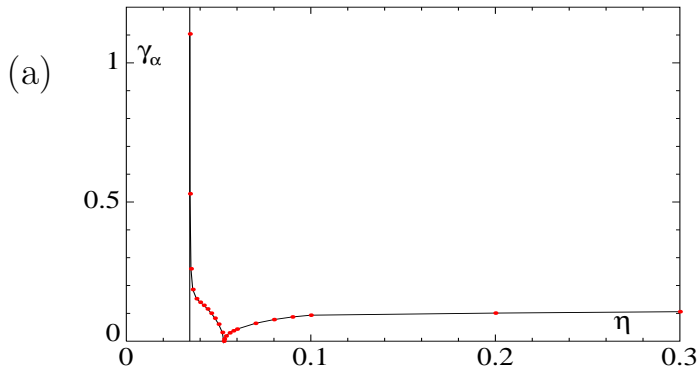
- Задача кинематического динамо
- Задача линейной гидродинамической устойчивости
- Задача линейной магнитогидродинамической устойчивости

Возмущаемые стационарные состояния синтезированы как ряды Фурье со случайными коэффициентами. Они соответствуют разным диапазонам пространственных масштабов:

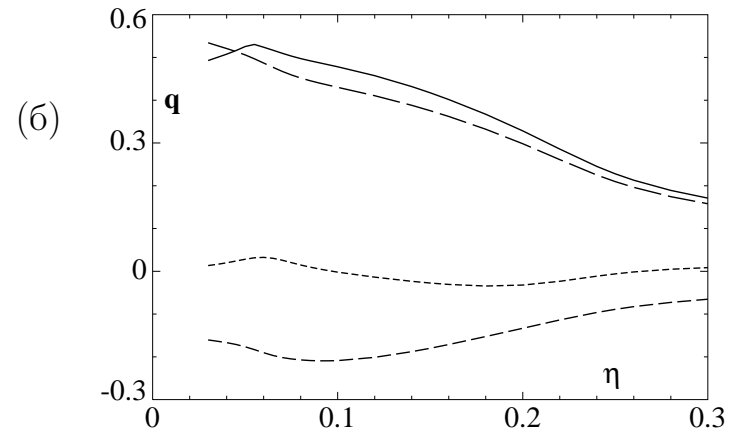
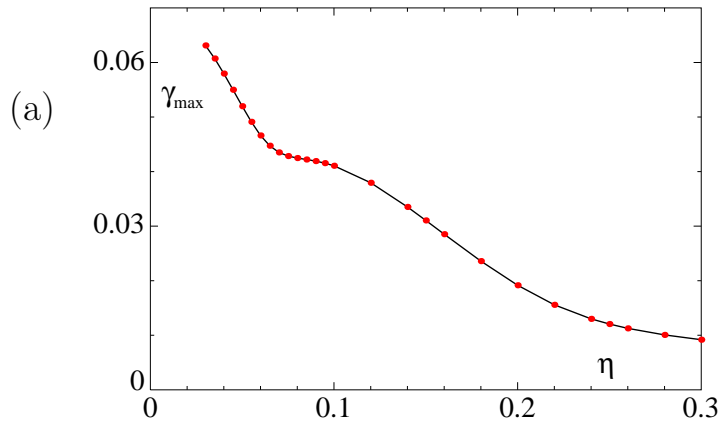
- Экспоненциально убывающий энергетический спектр
 - диффузионный диапазон
- Колмогоровский энергетический спектр $c_k \sim |k|^{-11/6}$
 - динамический диапазон
- Гармоники с волновыми числами (по каждой координате) не более 2
 - нерегулярный спектр в его начале

Желиговский В.А., Чертовских Р.А. О кинематической генерации магнитных мод блоховского типа. *Физика Земли* №1, 118-132 (2020);

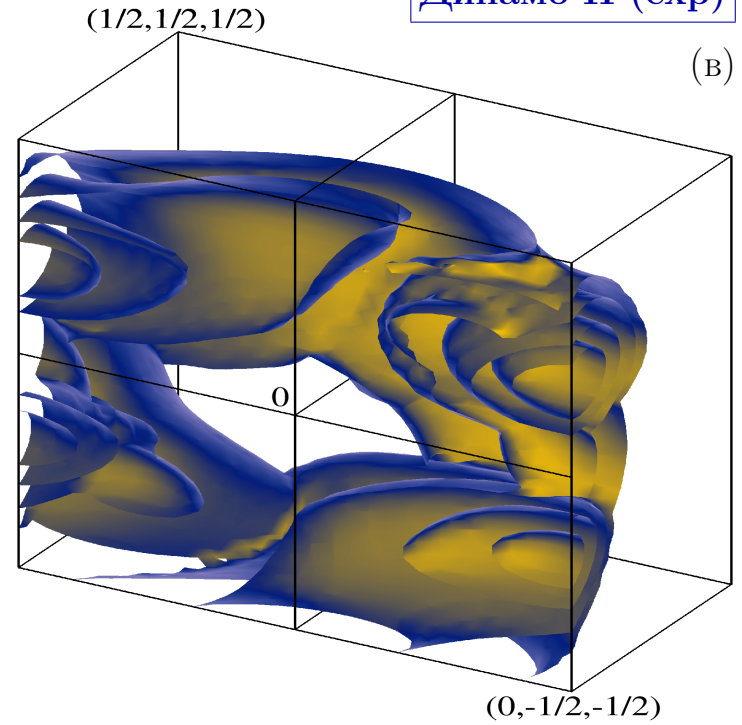
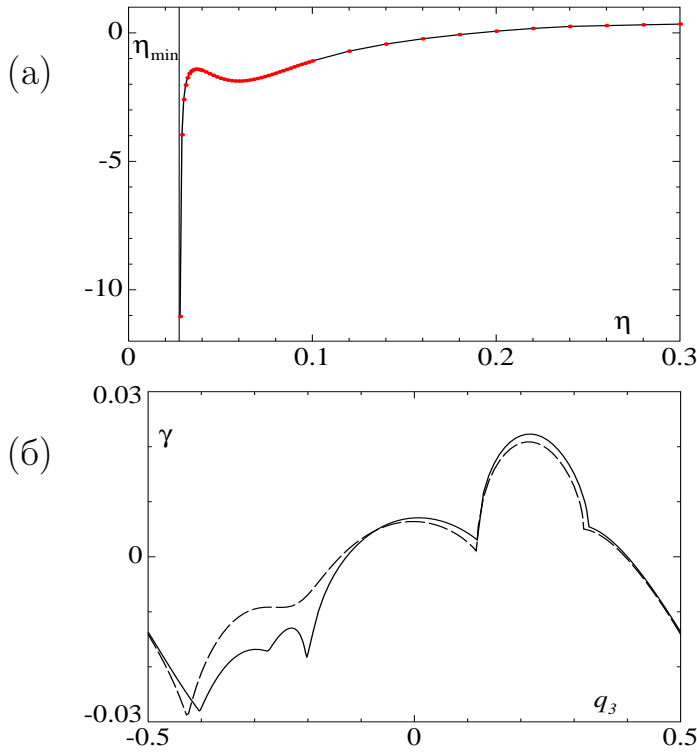
Chertovskih R.A., Zheligovsky V.A. Linear perturbations of the Bloch type of space-periodic magnetohydrodynamic steady states. Submitted (2022).



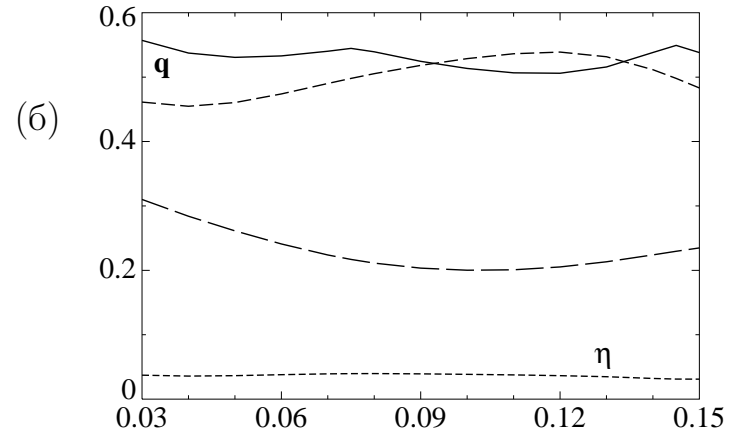
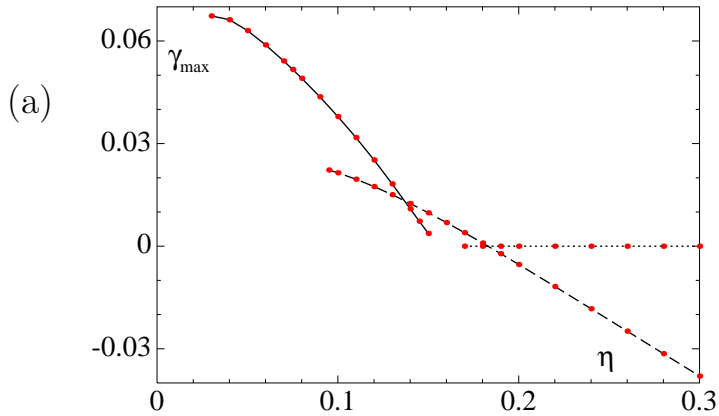
Максимальный инкремент роста длинномасштабного магнитного поля γ_α , генерируемого α -эффектом (а). Точки: вычисленные γ_α . Тонкая прямая: вертикальная асимптота γ_α в точке начала генерации короткомасштабного поля. Инкремент роста γ доминирующих блоховских магнитных мод при $q_1 = 0$, $q_3 = 0.4$ (сплошная линия) и $q_1 = 0.05$, $q_3 = 0.15$ (пунктир) как функции q_2 при $\eta = 0.1$ (б). Исоповерхности в \mathbb{Q} инкремента γ при $\eta = 0.1$ на уровнях 25%, 50%, 75% и 90% от $\max_{\mathbf{q}} \gamma(\mathbf{q})$ (в).



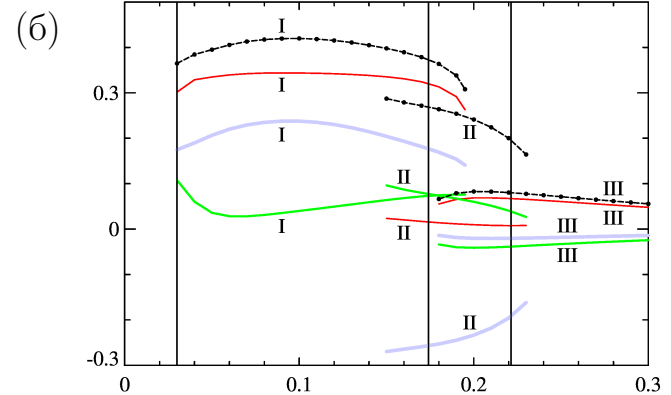
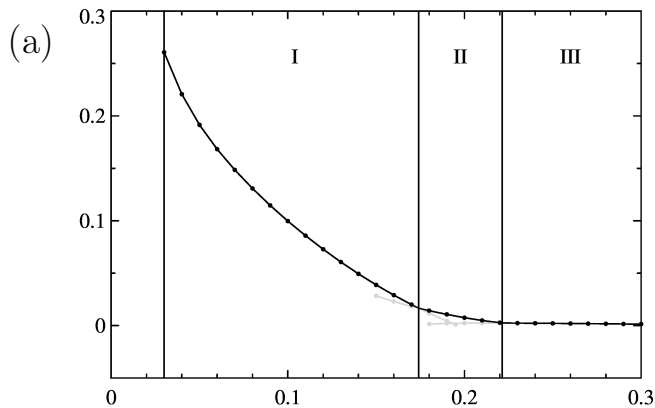
Максимальный в \mathbb{Q} инкремент γ_{\max} роста магнитной моды (а) и волновой вектор \mathbf{q} , при котором γ_{\max} достигается, (б). Точки: вычисленные γ_{\max} . Сплошная линия: $|\mathbf{q}|$, штриховые: q_k , длина штриха увеличивается с индексом k (б).



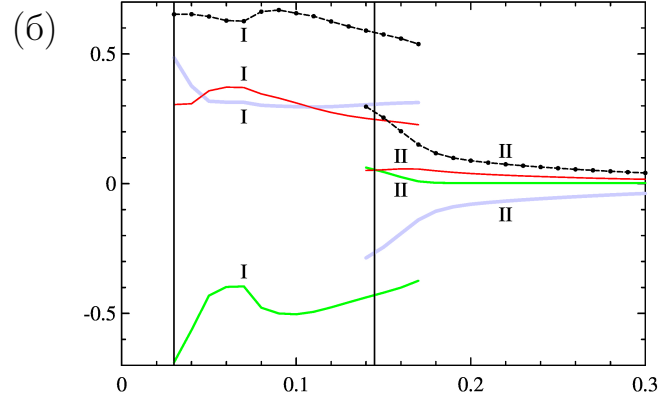
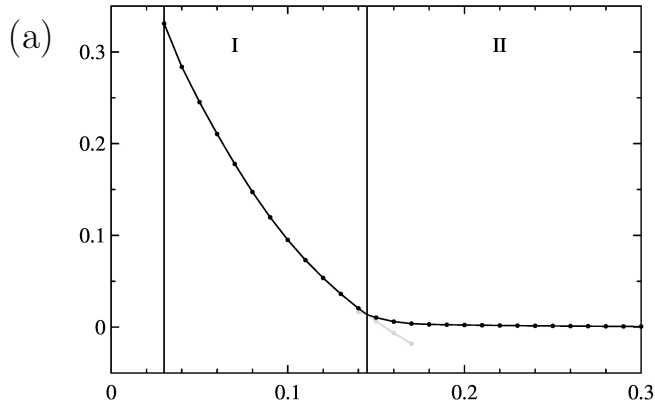
Минимальная магнитная вихревая диффузия η_{\min} (а). Точки: вычисленные η_{\min} . Тонкая прямая - вертикальная асимптота η_{\min} в точке начала генерации короткомасштабного магнитного поля. Инкремент роста γ доминирующих магнитных мод для $q_1 = 0.2, q_2 = -0.45$ (сплошная линия) и $q_1 = 0.2, q_2 = -0.475$ (пунктир) как функции q_3 при $\eta = 0.1$ (б). Исоповерхности инкремента в \mathbb{Q} при $\eta = 0.1$ на уровнях 25%, 50%, 75% и 90% от максимального в \mathbb{Q} инкремента роста (в).



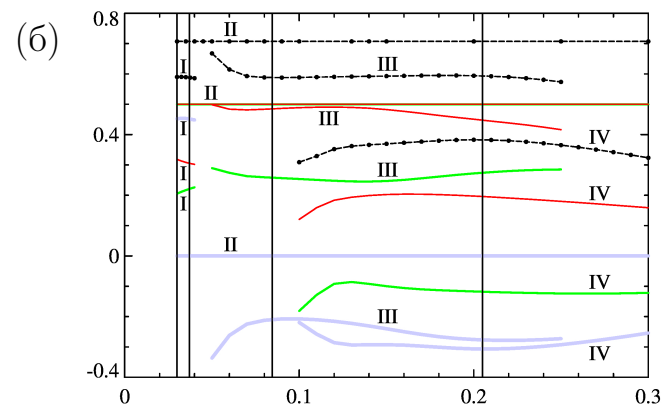
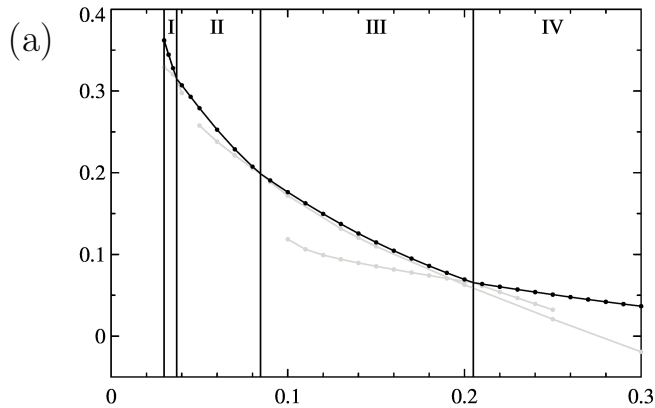
Максимальный в \mathbb{Q} инкремент γ_{\max} роста магнитной моды (а) и волновой вектор \mathbf{q} , при котором γ_{\max} достигается, (б). Точки: вычисленные γ_{\max} . Сплошная линия: $|\mathbf{q}|$, штриховые: q_k (б), длина штриха увеличивается с индексом k для левой ветви (сплошная линия) на графике (а). Средняя ветвь (штриховая линия): (локальные) максимуму инкремента достигаются при $\mathbf{q} = (0, 1/2, 0)$. Правая ветвь (пунктир): нейтральные моды с ненулевым средним при $\mathbf{q} = 0$.



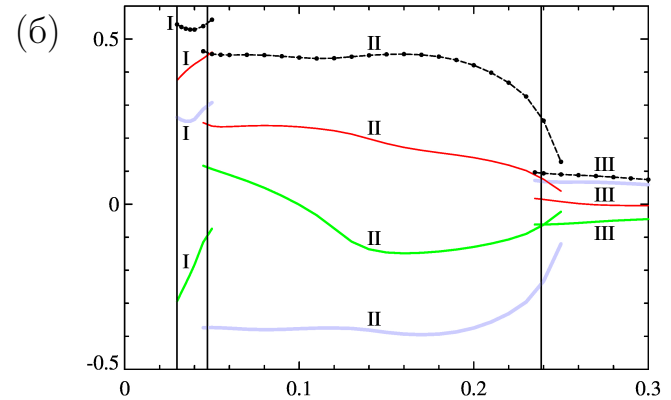
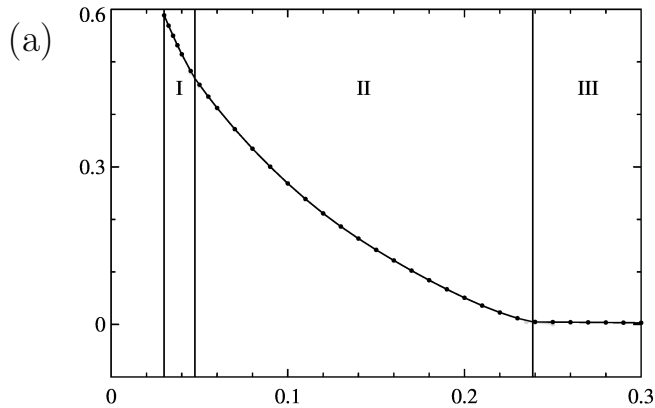
Максимальный в \mathbf{Q} инкремент γ_{\max} роста моды гидродинамической устойчивости (а) течения с экспоненциальным затуханием энергетического спектра, обладающего α -эффектом, и волновой вектор \mathbf{q} , при котором γ_{\max} достигается, (б), как функции молекулярной вязкости ν . Интервалы доминирования разных ветвей мод разграничены тонкими вертикальными линиями и пронумерованы римскими цифрами. Серые линии: инкременты мод устойчивости, полученных продолжением по параметру соответствующих ветвей вне интервалов их доминирования (а). Красные, зеленые и голубые линии: компоненты q_1 , q_2 и q_3 , черный пунктир: $|\mathbf{q}|$ (б). Точки: вычисленные γ_{\max} .



Максимальный в \mathbb{Q} инкремент γ_{\max} роста моды гидродинамической устойчивости (а) течения, обладающего α -эффектом, синтезированного из гармоник с волновыми числами не более 2, обладающим α -эффектом, и волновой вектор \mathbf{q} , при котором γ_{\max} достигается, (б), как функции ν . Интервалы доминирования разных ветвей мод разграничены тонкими вертикальными линиями и пронумерованы римскими цифрами. Серые линии: инкременты мод устойчивости, полученных продолжением по параметру соответствующих ветвей вне интервалов их доминирования (а). Красные, зеленые и голубые линии: компоненты q_1 , q_2 и q_3 , черный пунктир: $|\mathbf{q}|$ (б). Точки: вычисленные γ_{\max} .



Максимальный в \mathbb{Q} инкремент γ_{\max} роста моды МГД устойчивости (а) стационарного МГД состояния с экспоненциальным затуханием энергетического спектра, обладающего α -эффектом, и волновой вектор \mathbf{q} , при котором γ_{\max} достигается, (б), как функции $\eta = \nu$. Интервалы доминирования разных ветвей мод разграничены тонкими вертикальными линиями и пронумерованы римскими цифрами. Серые линии: инкременты мод устойчивости, полученных продолжением по параметру соответствующих ветвей вне интервалов их доминирования (а). Красные, зеленые и голубые линии: компоненты q_1 , q_2 и q_3 , черный пунктир: $|\mathbf{q}|$ (б). Точки: вычисленные γ_{\max} . В интервале II глобально максимальные в \mathbb{Q} инкременты достигаются при полуцелом волновом векторе $q_1 = q_2 = 1/2$, $q_3 = 0$, $|\mathbf{q}| = 1/\sqrt{2}$.



Максимальный в \mathbb{Q} инкремент γ_{\max} роста моды МГД устойчивости (а) стационарного МГД состояния, обладающего α -эффектом, синтезированного из гармоник с волновыми числами не более 2, и волновой вектор \mathbf{q} , при котором γ_{\max} достигается, (б), как функции $\eta = \nu$. Интервалы доминирования разных ветвей мод разграничены тонкими вертикальными линиями и пронумерованы римскими цифрами. Серые линии: инкременты мод устойчивости, полученных продолжением по параметру соответствующих ветвей вне интервалов их доминирования (а). Красные, зеленые и голубые линии: компоненты q_1 , q_2 и q_3 , черный пунктир: $|\mathbf{q}|$ (б). Точки: вычисленные γ_{\max} .

Итак,

- На рассматриваемом интервале изменения параметров максимальные в \mathbb{Q} инкременты достигаются при \mathbf{q} , **которые никак не малы**.
- Только в одном из рассмотренных примеров (Гидро-I) при уменьшении диффузионного параметра $|\mathbf{q}|$ уменьшается, но незначительно.
- Таким образом, ни в одном из рассмотренных случаев наиболее неустойчивая мода не характеризуется высоким разделением масштабов. α -эффект не будет виден на фоне роста доминирующей моды блоховского типа, характеризующейся низким разделением пространственных масштабов.
- В сценарии Л.Д. Ландау развития турбулентности предполагалось постепенное усложнение течения с появлением в последовательности бифуркаций *временных* периодичностей, несоизмеримых с уже присутствующими в течении. Исследованный механизм развития неустойчивостей аналогичен, но сводится к каскадному появлению дополнительных *пространственных* частот. Если в какой-то момент времени и образуется существенное разделение пространственных масштабов, этим механизмом оно уничтожается.
- Таким образом, α -эффект, основанный на разделении пространственных масштабов, вряд ли реализуется в реальных природных МГД или гидродинамических системах. Необходимо выявить более реалистичные механизмы генерации магнитного поля и развития неустойчивостей.
- Напротив, α -эффект типа Брагинского указанным недостатком не обладает (но тем не менее считается, что не пригоден для Земли из-за принятого в этой модели асимптотического строения поля скорости).

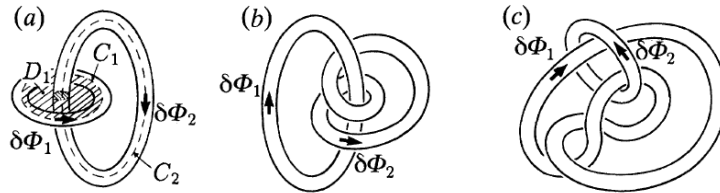
Миф о спиральности

$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{P}(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathcal{H}_{\mathbf{F}} = \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P} \, d\mathbf{x}$ - **спиральность** поля \mathbf{F} ;

$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x})$ - **завихренность** течения \mathbf{v} ; $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\omega}} = \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \, d\mathbf{x}$

- **кинетическая спиральность** (инвариант идеальной гидродинамики).

Helicity and the Călugăreanu invariant



Moffatt H.K., Ricca R.L.
Helicity and the Călugăreanu
invariant. Proc. R. Soc. Lond. A,
439, 411-429 (1992).

Figure 1. Linked, oriented and unknotted flux tubes with no internal contribution to helicity. In this case $\mathcal{H} = 2n\Phi_1\Phi_2$, where n is the (Gauss) linking number of the two tube axes. (a) $n = +1$; (b) $n = -2$; (c) $n = 0$.

$\mathcal{H} = 2\mathcal{N}\Phi_1\Phi_2$, где $\Phi_i = \int_{S_i} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\partial S_i} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ - поток завихренности

(по *теореме Гельмгольца* инвариант для каждой вихревой трубки).

\mathcal{N} - (целое) **число зацеплений**, или **степень заузленности**

(если внутри вихревых трубок все линии вихря топологически эквивалентны расцепленным окружностям).

Helicity and the Călugăreanu invariant

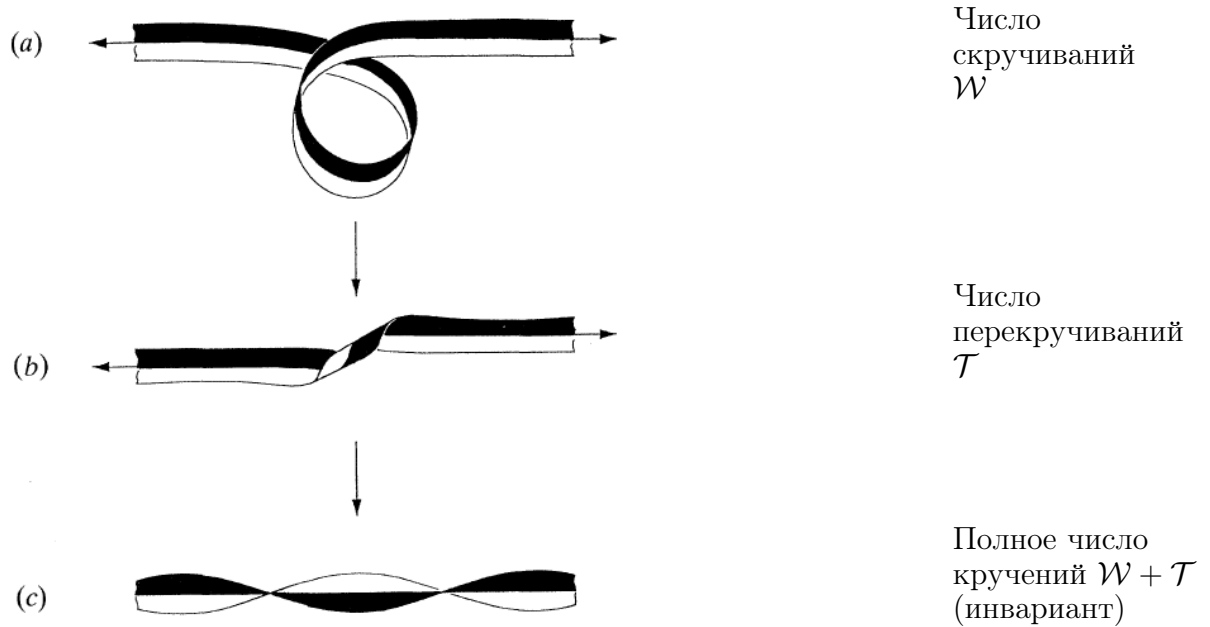


Figure 12. (a) Writhe, (b) torsion and (c) twist contributions of a ribbon to the Călugăreanu invariant. If a coiled ribbon is stretched so that its centre-line becomes straight, then the initial torsion of the centre-line is converted to the final twist of the ribbon about its centre-line.

В общем случае, для одной трубки, $\mathcal{H} = n\Phi^2$, где $n = \mathcal{W} + \mathcal{T} + \mathcal{N}$.

Два примера течений с поточечно нулевой кинетической спиральностью

Rasskazov A., Chertovskih R., Zheligovsky V. Magnetic field generation by pointwise zero-helicity three-dimensional steady flow of incompressible electrically conducting fluid.

Phys. Rev. E, 97, 043201 (2018).

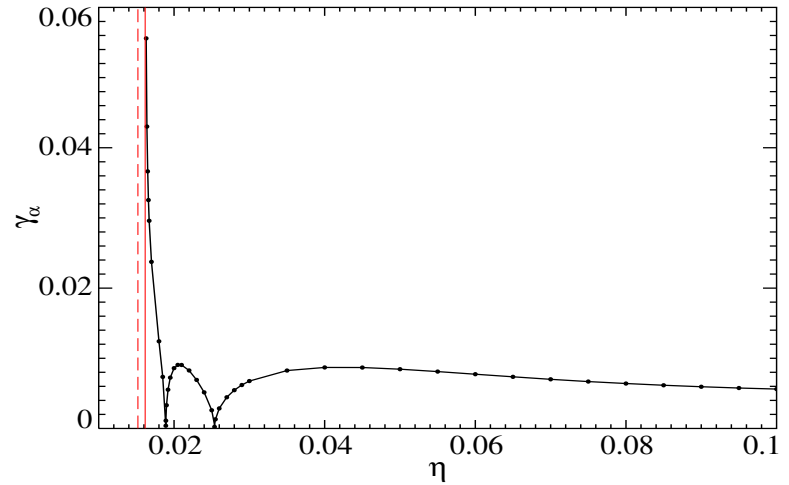
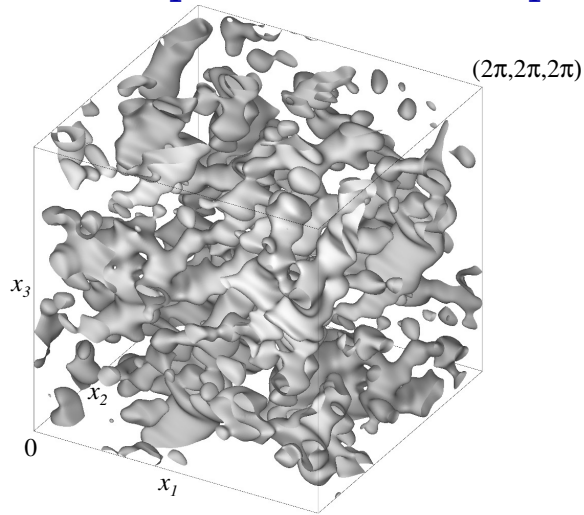
$$\text{(L)} \bullet \quad \mathbf{v} = (A\nabla B - B\nabla A)/2 - \nabla p, \quad 2\nabla^2 p = A \cdot \nabla^2 B - B\nabla^2 A$$
$$\nabla p \cdot (\nabla A \times \nabla B) = 0 - \text{ОК, если } \nabla^2 B = \lambda B, \nabla^2 A = \lambda A, p = 0.$$

Например, 72 гармоники Фурье с волновыми векторами $\pm 3, \pm 4, \pm 1$ и $\pm 5, 0, \pm 1$ для $\lambda = -26$.

$$\text{(C)} \bullet \quad v_1 = n(b_1 \sin(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) + a_1 \sin(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})) \cos nx_3$$
$$v_2 = n(b_2 \sin(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) + a_2 \sin(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})) \cos nx_3$$
$$v_3 = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\cos(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) + \cos(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})) \sin nx_3$$

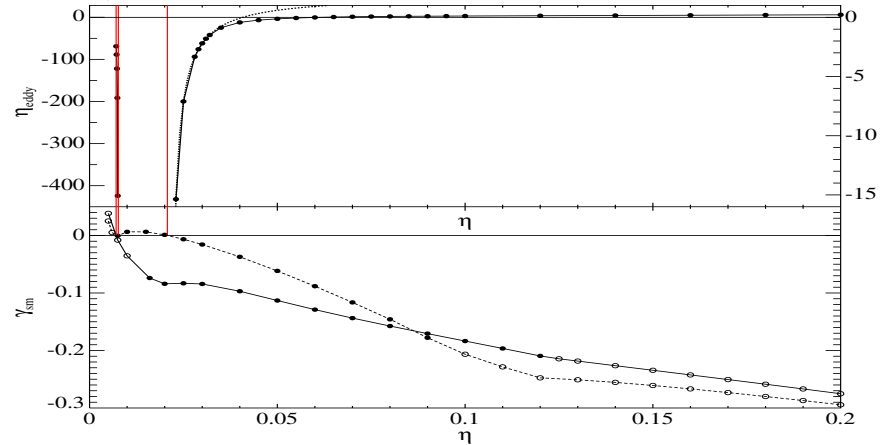
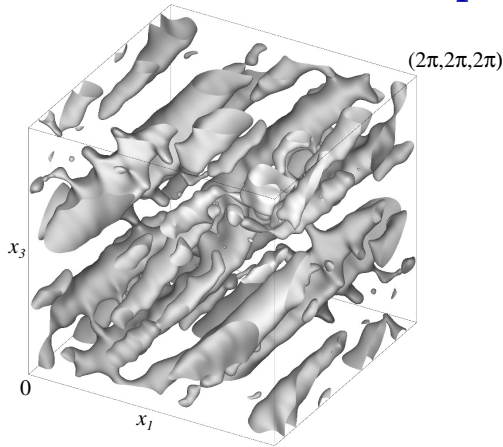
\mathbf{a}, \mathbf{b} - произвольные горизонтальные постоянные векторы.

Некоторые численные результаты. α -эффект



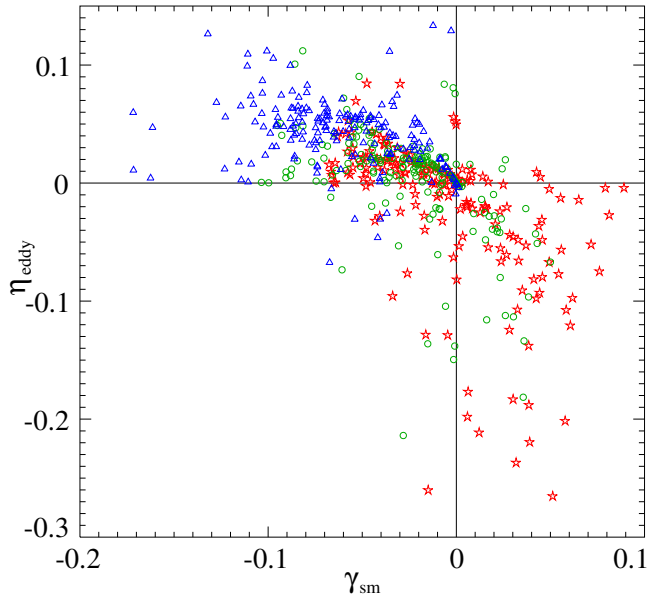
Изоповерхность плотности кинетической энергии тестового течения **семейства L** на уровне $1/3$ максимума (слева). **Максимальный по q инкремент роста длинномасштабной моды** (в медленном времени $T_1 = \varepsilon t$) как функция молекулярной магнитной диффузии η (справа). Точки - отсчитанные значения. Вертикальные линии - критические величины η начала генерации короткомасштабных мод в двух симметрических подпространствах.

Вихревая диффузия. Семейство L



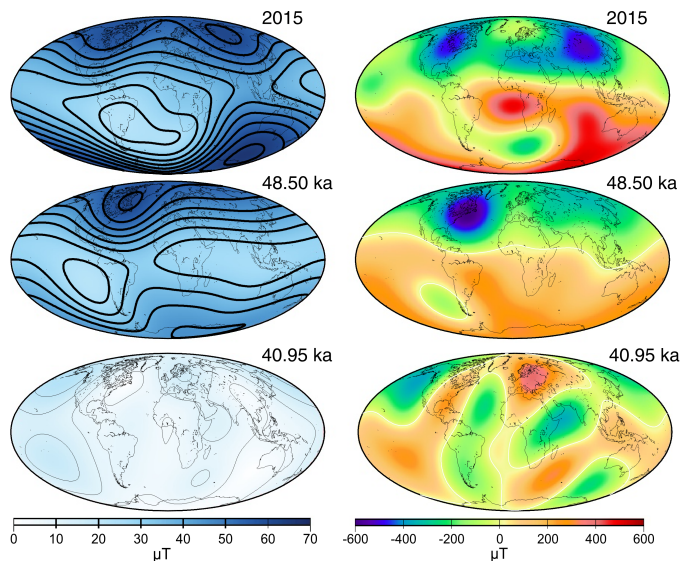
Слева: **Изоповерхность плотности кинетической энергии** тестового течения **семейства L** с центром симметрии, на уровне $1/3$ максимума. Справа сверху: **Минимальная по q вихревая диффузия** (генерация в медленном времени $T_2 = \varepsilon^2 t$) как функция молекулярной магнитной диффузии η . Точки - отсчитанные значения. Вертикальные линии - критические величины η начала короткомасштабной генерации. Снизу: максимальные инкременты роста короткомасштабных мод в симметрических подпространствах. Штриховая линия: генерация при $0.0077 \lesssim \eta \lesssim 0.0207$, ее нет при $0.0063 \lesssim \eta \lesssim 0.0077$, при $\eta \approx 0.0064$ с.з. становятся мнимыми (пустые кружки). Сплошная линия: генерация при $\eta \lesssim 0.0071$. \Rightarrow При $0.0071 \lesssim \eta \lesssim 0.0077$ короткомасштабной генерации нет. Справа с.з. проходит через 0 (действительно) \Rightarrow сингулярность отрицательной вихревой диффузии.

Вихревая диффузия. Семейство С



Распределение **минимальной вихревой диффузии** (вертикальная ось) против максимального инкремента роста короткомасштабных мод (горизонтальная ось) среди 183 течений семейства С для $\eta = 0.01$ (звезды), 0.02 (кружки) и 0.05 (треугольники).

Структура геомагнитного поля



Слева: геомагнитное поле на поверхности Земли, справа: на поверхности раздела ядро - мантия.

• “Перед инверсией Лашамп поле было подобно современному, но экскурсии не последовало.

И сейчас, возможно, не будет.”

Brown M., Korte M., Holme R., Wardinski I., Gunnarson S. **Earth's magnetic field is probably not reversing**. Proc. National Ac. Sci. (PNAS) 115, 5111-5116 (2018).

• В палеомагнитных данных предвестники инверсий не найдены.

• При теоретических рассмотрениях (теоремы существования и единственности уравнений Навье-Стокса и МГД) все сложности возникают из-за контрастных мелкомасштабных структур.

(Карты построены по разложениям в сферические гармоники до степени 5.)

Геометрия геомагнитного динамо

- Нелинейное динамо в расплавленном внешнем ядре Земли.
- Следствие вращения: колонны Тейлора.

G.A. Glatzmaier, P.H. Roberts/Physica D 97 (1996) 81–94

89

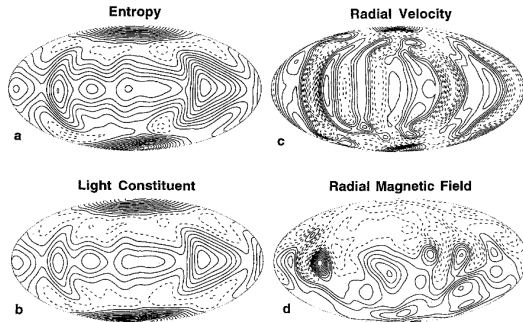
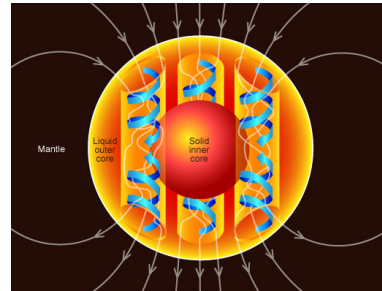
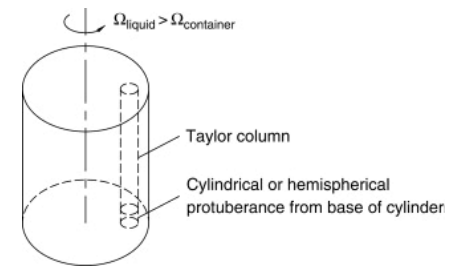


Fig. 2. A snapshot (at the same time as in Fig. 1) of the (a) specific entropy perturbation, (b) light constituent mass fraction perturbation, (c) radial component of the velocity, and (d) radial component of the magnetic field. (a), (b), and (c) are in the spherical surface at mid-depth in the outer core; (d) is at the CMB. For each of these equal area projections, the north (south) geographic pole is at the top (bottom) of the projection, with the equator being a horizontal line through the middle. Solid contours represent positive perturbations relative to the reference state; broken contours represent negative perturbations. The maximum and minimum contours in (a) are 9.0×10^{-5} and -1.2×10^{-5} J/(kg K), in (b) are 2.8×10^{-8} and -0.4×10^{-8} , in (c) are 6.3×10^{-4} and -5.6×10^{-4} m/s, and in (d) are 0.63 and -0.42 mT.



- Следствие быстрого вращения: погранслои Экмана.

$$E = \nu / (\Omega L^2) \sim 10^{-15}, \quad E_m = \eta / (\Omega L^2) \sim 10^{-9} \quad (R_m \approx 700 \Rightarrow Re = 7 \cdot 10^8).$$

⇒ “Чёрт кроется в деталях”: необходимо изучать мелкие пространственные масштабы возникающих структур.

Уравнения магнитогидродинамики

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} - \nabla p \quad (\text{уравнение Навье-Стокса})$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{b} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) \quad (\text{уравнение магнитной индукции})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0$$

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}^{\text{init}}, \quad \mathbf{b}|_{t=0} = \mathbf{b}^{\text{init}}$$

$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ скорость течения, $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ магнитное поле, $p(\mathbf{x}, t)$ давление
 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ (эйлеровы) пространственные координаты, t время
 ν коэффициент вязкости, η коэффициент магнитной диффузии
 \mathbf{v} , \mathbf{b} и p пространственно-периодичны.

Оценки для уравнения Навье-Стокса: Foias C., Guillopé C., Temam R. New a priori estimates for Navier-Stokes equations in dimension 3. Comm. Partial Diff. Equations, 6, 329-359 (1981).

$$\mathbf{b} = \sum_{\mathbf{n}} \widehat{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{v} = \sum_{\mathbf{n}} \widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}$$

$$\|f\|_s = \left(\sum_{\mathbf{n}} |\mathbf{n}|^{2s} |\widehat{f}_{\mathbf{n}}|^2 \right)^{1/2} - \text{норма в пространстве Соболева } H^s(\mathbb{T}^3).$$

Теорема. $\int_0^T (\|\mathbf{v}\|_s^2 + \|\mathbf{b}\|_s^2)^{\alpha_s/2} dt \leq Q^{(1)}(T)$ при $s \geq 1$, $\alpha_s = 2/(2s - 1)$;

$$\int_0^T (\|\mathbf{v}\|_s^2 + \|\mathbf{b}\|_s^2)^{\gamma_s/2} dt \leq Q^{(2)}$$
 при $0 < s \leq 1$, $\gamma_s = 2/s$;

$$\int_0^T \left(\sum_{\mathbf{n}} |\mathbf{n}|^{2s} (|\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}| + |\widehat{\mathbf{b}}_{\mathbf{n}}|) \right)^{\alpha_{s+3/2}} dt \leq Q^{(3)}(T)$$
 при $s > -1/2$;

$$\int_{t_0}^T (\|\partial \mathbf{v} / \partial t\|_s^2 + \|\partial \mathbf{b} / \partial t\|_s^2)^{\alpha_{s+2/2}} dt \leq D_s^{(1)}(T)$$
 при $s \geq -1/2$;

$$\int_{t_0}^T (\|\partial \mathbf{v} / \partial t\|_s^2 + \|\partial \mathbf{b} / \partial t\|_s^2)^{\gamma_{s+5/2/2}} dt \leq D_s^{(2)}(T)$$
 при $-5/2 < s \leq -1/2$;

$$\|\partial \mathbf{v} / \partial t\|_s^2 + \|\partial \mathbf{b} / \partial t\|_s^2 \leq D_s^{(3)}(T)$$
 при $s < -5/2$.

Zheligovsky V. Space analyticity and bounds for derivatives of solutions to the evolutionary equations of diffusive magnetohydrodynamics. *Mathematics*, **9**, 1789 (2021).

Учет мелких масштабов \Rightarrow

необходимость математического (численного) моделирования

Система уравнений конвективного динамо

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + P \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \sigma \theta \mathbf{e}_3 + \tau \mathbf{v} \times \mathbf{q} - \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{b})$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) + \eta \nabla^2 \mathbf{b}$$

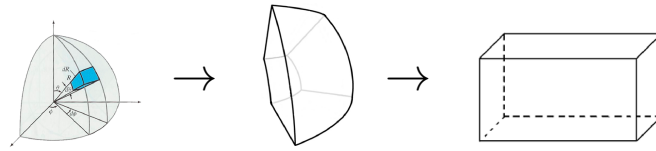
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot (\nabla \theta - \mathbf{e}_3) + \nabla^2 \theta$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0$$

$$\theta = T - (T_1 + T_{-1} + (T_1 - T_{-1})x_3)/2$$

Безразмерные числа: $P = \nu/\mu$, $P_m = \nu/\eta$, $\sigma = PRa$, $\tau/P = \sqrt{Ta}$.

Граничные условия:



$$\mathbf{v}|_{x_3=\pm 1} = 0;$$

$$\mathbf{b}|_{x_3=1} = \nabla h, \quad \nabla^2 h = 0 \text{ при } x_3 \geq 1, \quad h_m \rightarrow 0 \text{ при } |x_3| \rightarrow \infty;$$

$$\left. \frac{\partial b^1}{\partial x^3} \right|_{x_3=-1} = \left. \frac{\partial b^2}{\partial x^3} \right|_{x_3=-1} = b^3|_{x_3=-1} = 0.$$

$$T|_{x_3=\pm 1} = T_{\pm 1} \quad \Rightarrow \quad \theta|_{x_3=\pm 1} = 0;$$

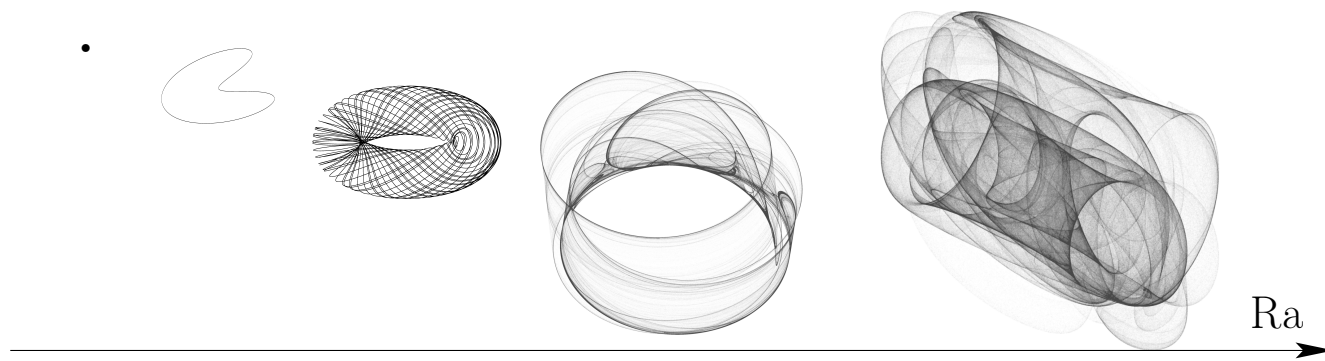
$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(x_1 + n_1 L_1, x_2 + n_2 L_2, x_3),$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(x_1 + n_1 L_1, x_2 + n_2 L_2, x_3),$$

$$\theta(\mathbf{x}) = \theta(x_1 + n_1 L_1, x_2 + n_2 L_2, x_3).$$

Начальные условия: не важны.

Сценарий Рюэля-Тakensа перехода к хаосу



Стационарное состояние

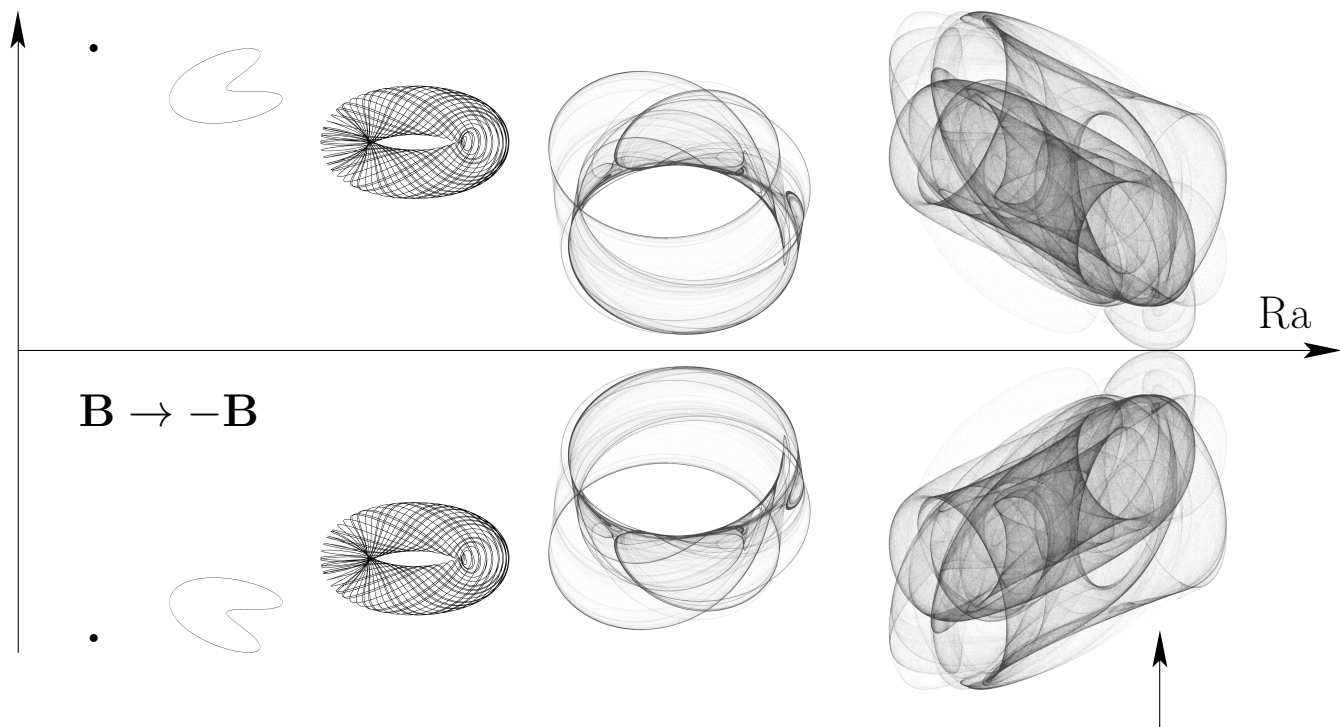
→ Периодическая орбита

→ Квазипериодический режим (2 несоизмеримые частоты)

→ Хаотический аттрактор

Сценарий структурно устойчив.

Сценарий О.М. Подвигиной возникновения инверсий



Возникновение инверсий

Podvigina O.M. A route to magnetic field reversals: an example of an ABC-forced non-linear dynamo. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 97, 2003, 149-174.

Наша программа действий

- Важны лишь грубые черты системы конвективного динамо: квадратичная нелинейность и наличие симметрии обращения магнитного поля $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$
- Игнорируем многие (в т.ч. неизвестные) процессы и зависимости:
 - седиментация;
 - радиоактивные процессы (источники тепла);
 - химические реакции;
 - изменение агрегатного состояния вещества (в т.ч. кристаллизация на границе со внутренним ядром);
 - реологические зависимости;
 - влияние неоднородностей границы ядра-мантия
- Не воспроизводим величины параметров, характерные для внешнего ядра
- Поиск минимальных вычислительно пригодных параметров, следуя сценарию Подвигиной (увеличение R_a , вариация T_a)
- Генерация большого числа инверсий
- Использование алгоритмов искусственного интеллекта для выявления предвестников экскурсий и инверсий
- Применение выявленных предвестников к результатам измерений геомагнитного поля

Комментарии

- Числа Экмана для внешнего ядра Земли:

$$E = \nu / (\Omega L^2) \sim 10^{-15}, E_m = \eta / (\Omega L^2) \sim 10^{-9} \quad (R_m \approx 700 \Rightarrow \text{Re} = 7 \cdot 10^8).$$

- Для достижения достаточного пространственного разрешения турбулентности во внешнем ядре Земли необходима длина шага сетки 10 см.

$R_p = 3843$ км, $R_c = 1220$ км. $\Rightarrow \gtrsim 10^6$ точек сетки или базисных функций в методе Галеркина **по одной переменной!**

Masaru Kono, Paul H. Roberts. Recent geodynamo simulations and observations of the geomagnetic field. *Reviews of Geophysics*, 40, 4 (2002) (53 pp.)

- Применение регуляризирующих операторов (гипердиффузии) для уменьшения вычислительной сложности задачи может изменять геометрию решения.

Zhang K., Jones C.A. The effect of hyperviscosity on geodynamo models. *Geophysical Research Lett.*, 24, 2869-2872 (1997).

Zhang K., Jones C.A., Sarson G.R. The dynamical effects of hyperviscosity on numerical geodynamo models. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 42, 247-253 (1998).

Zhang K., Schubert G. Magnetohydrodynamics in rapidly rotating spherical systems. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 32, 409-443 (2000).

- Алгоритмические сложности:

$$\mathbf{v}|_{x_3=1} = 0; \text{ но также } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x^3} \right|_{x_3=1} = 0!$$

⇒ Большинство алгоритмов удовлетворяют эти условия **некорректно!**

Stellmach S., Hansen U. An efficient spectral method for the simulation of dynamos in Cartesian geometry and its implementation on massively parallel computers. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 9, Q05003 (2008).

Although the geodynamo is certainly different than the chemically driven dynamos we studied, these dynamos surprisingly yielded Earth-like paleomagnetic data distributions.

- Gilder, S.A., Lhuillier F. Can paleomagnetism distinguish dynamo regimes? In *Geomagnetism, aeronomy and space weather*, CUP, 2020, 48-53.

Выводы

1. Делать выводы рано.

Благодарю за внимание.



Желиговский Владислав Александрович

Доктор физико-математических наук

Главный научный сотрудник Института теории прогноза землетрясений и
математической геофизики РАН

vlad@mitp.ru