Формулы Фурье: от дискретного до интегрального

Дискретное преобразование Фурье

Основной объект изучения – последовательности $\mathbf{f} = f(t) = (f_0, f_1, \dots f_{N-1})$ – следует понимать это как измерения сигнала в равноотстоящих друг от друга моментах времени $t_m = m\Delta t$) конечной длины N. Разумеется, такую запись удобно также понимать как координаты N-мерного вектора в базисе векторов $\mathbf{e}_k = (0, 0, 1, \dots 0)$ (единичка стоит на k-том месте). Векторы базиса $\{\mathbf{e}_k\}$ естественно называть единичными импульсами, а координаты в этом базисе – представлением сигнала во временн**о**й или импульсной области. Иными словами, $f(t_m) = \sum_0^{N-1} f_k e_k(t_m)$.

Для простоты будем пока считать $\Delta t = 1$ так что $t_m = m$, в случае изменения шкалы все формулы без труда переписываются явно (см ниже). Вот простые факты из линейной алгебры, которые здесь нужны:

- Вспомните, что такое **ортонормальный** базис.
- Если базис $\mathbf{e}_k = (0, 0, 1, \dots 0)$ ортонормальный, то длина вектора $(f_0, f_1, \dots f_{N-1})$ легко находится через его координаты: $\sqrt{\sum f_k^2}$.
- Верно ли, что базис из импульсов ортонормальный?

Квадрат длины вектора в теории сигналов называется *энергией* сигнала.

Преобразование Фурье – это преобразование координат вектора, если вместо (пока что конечного) импульсного базиса выбрать некоторый другой, который называется **базисом Фурье**. Мотивация выбора нового базиса (Фурье) такова: – он должен быть удобен, чтобы в нем проще отслеживать большинство физически значимых процессов. Очевидно, длина вектора не зависит от того в каком базисе выписывать его координаты, в случае, когда базисы ортонормированы, формула для энергии выглядит одинаково в каждом из них. **Равенством Парсеваля** называется выражение, приравнивающее энергии (то есть квадраты длин) одного и того же сигнала, выписанные в импульсном базисе и в базисе Фурье.

Вернемся к мотивации выбора нового базиса: сигналы записей физических процессов, в случае непрерывного времени как правило описывают на математическом языке как решения некоторых дифференциальных уравнений. Дискретный аналог дифференциирования – это разностный оператор $D = \frac{T-E}{\Delta t}$, здесь E обозначает тождественный оператор, а T – сдвиг на Δt: $T\,(f_0, f_1, \dots) = (f_1, f_2 \dots)$. Пусть интервал времени Δt будет единичным, тогда изучая оператор сдвига координаты можно понять как именно изменяются записи сигналов. Поэтому поиск базиса определен требованием, чтобы в нем оператор T выглядел просто, например был бы диагональным.

Для конечных последовательностей определение оператора сдвига T нуждается в уточнении его действия на концах последовательности, в дискретном конечномерном случае можно "закольцевать"последовательность так чтобы все ее члены расположились в вершинах правильного N-угольника на единичной окружности и оператор T оказался бы поворотом "на одно деление"этого многоугольника:

$$T\,(f_0, f_1, \dots) = (f_1, f_2 \dots f_0)$$

Оператор сдвига перводит базисные импульсы друг в друга, под воздействием оператора D координаты f_k произвольного вектора перепутываются весьма сложным образом. Ситуация станет проще, если бы удалось найти такие новые базисные векторы $\mathbf{u}_k$, что под воздействием оператора D каждый из них просто умножается на **собственное число** λ_k ("растягивается" в λ_k раз) – тогда оператор D изменял бы координаты $\hat{f}_k$ (выписанные в базисе $\{\mathbf{u}_k\}$) любого вектора несложно – каждая координата $\hat{f}_k$ умножалась бы на раз и навсегда определенное число $1/\lambda_k$ (подумайте, почему это так). Такой базис для оператора D называется **собственным** и матрица оператора D в этом базисе диагональна.

- Важное наблюдение: если базис собственный для оператора сдвига T, то он собственный и для оператора D. Проверить.

Оказывается, собственный базис для оператора сдвига T найти можно лишь только если использовать комплексные числа: в векторном пространстве комплекснозначных последовательностей имеется, например, такой базис:

$$\mathbf{u}_k \quad \text{это} \quad \left(1, e^{i\frac{2\pi k}{N}\cdot 1}, e^{i\frac{2\pi k}{N}\cdot 2}, \dots e^{i\frac{2\pi k}{N}\cdot m}, \dots\right)$$

- Найти *собственное число* ω_k, отвечающее *собственному* вектору $\mathbf{u}_k$ оператора T. Как связаны между собой комлексные числа ω_{N-k} и ω_k?

- Задача: ортогональный ли базис $\{\mathbf{u}_k\}$? Что нужно сделать чтоб он стал ортонормальным?

Координаты $\hat{f}_*$ сигнала (т.е. вектора $\mathbf{f}$) в новом базисе $\{\mathbf{u}_k\}$ называются *спектром* сигнала, индексы координат можно связать с числами ω_k ; разложение сигнала по новым базисным векторам $\mathbf{u}_k$ называют разложением по собственным гармоникам (частотам), все множество индексов ω_k называют спектральной областью:

$$\mathbf{f} = \sum_{0}^{N-1} \hat{f}_{\omega_k} \mathbf{u}_{\omega_k}$$

В ортогональном базисе координаты ищут через перпендикулярные проекции вектора на базисный вектор. Напомним, что скалярное (оно еще называется эрмитовым) произведение в импульсном базисе для двух векторов с комплексными коэффициентами $(u_0, u_1, \dots u_{N-1})$ и $(v_0, v_1, \dots v_{N-1})$ ищется по формуле $\sum_i u_i \bar{v}_i$. Напишите самостоятельно формулу для проекции $\mathbf{f}(k)$ на вектор единичной длины в направлении, указанном вектором $e^{i\frac{2\pi k}{N}\cdot 1}$ (не забывая при этом, что числа в формулах комплексные).

Явные выражения для комплексных чисел ω_k (см. упражнение выше) показывают, что они расположены на комплексной плоскости симметрично относительно вещественной оси, поэтому отвечающие им базисные векторы принято называть *положительными и отрицательными частотами* в соответствии со знаком мнимой части ω_k (можно также ориентироваться на сравнение k с $N/2$.), поэтому говорят о положительной и отрицательной частях спектра. Важно напомнить, в случае конечных последовательностей сам сигнал и его спектр следует считать последовательностями длины N, спектральная и временная область в этом случае устроены одинаково. Это преобразование координат принято называть Дискретным Преобразованием Фурье (ДПФ).

Основное тождество Фурье состоит в том, что сигнал $\mathbf{f}$ можно переписать из одного базиса в другой и обратно без потерь информации, вот оно:

$$f(r) = \frac{1}{N} \sum_s \left(\sum_t f(t) e^{-\frac{2\pi i}{N} st} \right) e^{\frac{2\pi i}{N} sr} \tag{1}$$

- Задача: Объяснить появление коэффициента $\frac{1}{N}$ в формуле тождества Фурье

Изменение шкалы времени и предельные переходы

Ряды Фурье

Будем рассматривать симметричные шкалы в тождестве Фурье (1), а именно будем считать, что $-K \leqslant t, s \prec K$ где $2K = N$ и $\prec$-sign обозначает либо $\leqslant$ либо $<$ в зависимости от четности числа N. Для произвольного не обязательно целого числа $L > 0$ обозначим $\alpha_t = \frac{Lt}{K}$ тогда $-L \leqslant \alpha_t \prec L$, в терминах этого нового параметра. Введем еще обозначение $d\alpha = \alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{L}{K}$ тогда тождество (1) приобретает вид, который распространен в справочниках:

$$f(\alpha_r) = \frac{1}{2L} \sum_s \left(\sum_t f(\alpha_t) e^{-\frac{i\pi s \alpha_t}{L}} d\alpha \right) e^{\frac{i\pi s \alpha_r}{L}} \tag{2}$$

Ясно, что при $K \to \infty$ получается другая известная из справочников формула преобразования Фурье $\digamma$ функций непрерывного аргумента α, такого что $-L \leqslant \alpha \prec L$

$$\digamma : \mathbf{f} \mapsto \left\{ \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(\alpha) e^{-\frac{i\pi s\alpha}{L}} d\alpha \right\}_{s\in\mathbb{N}} \tag{3}$$

Эта версия называется *разложением в ряд Фурье*): преобразование Фурье задает **двойственность** между бесконечными наборами коэффициентов, индексированных параметром α (функциями параметра α лежащего на единичной окружности), и бесконечными наборами коэффициентов, индексированными порядковыми номерами гармоник. Указанный в правой части набор чисел в математическом анализе также называется **коэффициентами ряда Фурье**, в начальных курсах математического анализа их принято выписывать не в комплексном виде, а в виде отдельно вещественной и мнимой части (что нередко усложняет запоминание формулы тождества Фурье).

- Задача: выписать тождество Фурье в случае вещественного сигнала без использования комплексных чисел.

Интегральные формулы Фурье

Наконец еще одно переобозначение $\beta_s = \frac{\pi s}{L}$ дает в основном (дискретном) тождестве Фурье

$$f(\alpha_r) = \frac{1}{2\pi} \sum_s \left(\sum_t f(\alpha_t) e^{-i\beta_s \alpha_t} d\alpha \right) e^{i\beta_s \alpha_r} d\beta \tag{4}$$

здесь $d\beta = \frac{\pi}{L}$. Когда $K \to \infty$ и $L \to \infty$ получается так называемая **интегральная формула Фурье**

$$f(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{-i\beta\alpha} d\alpha \right) e^{i\beta\gamma} d\beta \tag{5}$$

Таким образом, импульсная и частотная области опять становятся одинаковыми – в этой версии это просто все вещественные числа.

- Задача: выписать явно какую-нибудь базисную функцию из базиса Фурье в этой версии.
- Трудная задача: что такое импульсная функция в импульсном базисе в этой версии?

Практический выбор какую область индексов называть импульсной, а какую — спектральной зависит от контекста: например, спектр бесконечного дискретного сигнала следует считать сосредоточеным на единичной окружности (то есть в индексации спектра используется α, в индексации импульсов целые числа – номера отсчетов), а спектр периодического сигнала (то есть опять-таки функции от аргумента α) следует индексировать целыми числами.

Происхождение трудностей в цифровой обработке сигналов

Замена переменных и последующий предельный переход заменяют в дискретном тождестве 1 знак конечной суммы на бесконечную или на интеграл. Важно помнить, что эти предельные переходы и преобразование (двойственность) Фурье **не коммутируют: если сделать сначала предельный переход, а потом от результата взять преобразование Фурье, то получится не вполне то же самое, что при преобразовании Фурье и последующем предельном переходе** — это явление называется алиасингом (калька английского слова aliasing). Практический анализ дисретных сигналов основан на представлении, что мы изучаем дискретными средствами непрерывный случай, поэтому реальные расчетные формулы для цифрового анализа непрерывных сигналов могут быть не настолько уж простыми как приведенное выше теоретическое описание.

Многомерные сигналы

Естественным обобщением ранее изложенного подхода служит рассмотрение сигналов, индексы которых $\boldsymbol{x} = (x_{\boldsymbol{i}_1}, x_{\boldsymbol{i}_2}, \dots x_{\boldsymbol{i}_n})$ где индексы на этот раз взяты из многомерного пространства $\mathbb{R}^N$. Например представление картинок в компьютере — это двумерный сигнал.

В современных программных пакетах достаточно много библиотек для обработки двумерных сигналов и в принципе начать можно с любого из них. Соответствующие функции преобразования Фурье в python можно найти в `np.fft.fft2, scipy.fftpack.dct`, обязательно внимательно ознакомьтесь с версией нормализующих коэффициентов при прямых и обратных преобразованиях. Можно начать изучение с пакета scikit-image `https://scikit-image.org/docs` языка python следует ознакомиться с некоторыми функциями, реализующими обработку образов.

ДПФ и соответствующее интегральное преобразование в $\mathbb{R}^2$

Достаточно очевидные обобщения одномерных формул на общий многомерный случай мы обсуждать здесь не будем, а ограничимся лишь двумерным вариантом, поскольку двумерный сигнал в практическом понимании удобно связать с двумерной картинкой –image. Исключительно для простоты мы ограничимся примером формулы ДПФ для квадратных массивов (то есть $N_1 = N_2 = N$) — в конце-концов прямоугольный массив можно считать квадратным, дополняя его нулями.

Двумерное ДПФ — это преобразование $\mathcal{F}: f(t_1,t_2)\to\hat{f}(\omega_1,\omega_2)$, заданное очевидным обобщением обычной формулы:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\boldsymbol{s})=\hat{f}(s_1,s_2)&=\sum_{\boldsymbol{t},\boldsymbol{s}} f(\boldsymbol{t})e^{-2\pi i\frac{(\boldsymbol{t},\boldsymbol{s})}{N}}=\sum_{t_2=0}^{N-1}\sum_{t_1=0}^{N-1} f(t_1,t_2)\exp\left(-2\pi i\frac{t_1s_1+t_2s_2}{N}\right)\\&=\sum_{t_2=0}^{N-1}\left(\sum_{t_1=0}^{N-1} f(t_1,t_2)e^{-2\pi i\frac{t_1s_1}{N}}\right)e^{-2\pi i\frac{t_2s_2}{N}}\\&=\sum_{t_1=0}^{N-1}\left(\sum_{t_2=0}^{N-1} f(t_1,t_2)e^{-2\pi i\frac{t_2s_s}{N}}\right)e^{-2\pi i\frac{t_1s_1}{N}}\end{aligned}$$

- Запишите обратное преобразование Фурье и тождество Фурье для этого случая

Интегральный случай

Соответственно для двумерного сигнала в $\mathbb{R}^2$ имеем интегральное преобразование Фурье; мы можем считать, что $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{\nu}$ даны в прямоугольных координатах $\mathbb{R}^2$, причем координатные оси удобно отождествить: $x_2=0$ с $\nu_2=0$ и $x_1=0$ с $\nu_1=0$. В зависимости от того, какой именно тип частот мы рассматриваем, **показатель у экспоненты и соответственно коэффициент при интеграле может варьироваться на дополнительный множитель, связанный с π или 2π — это обычное дело, когда речь идет о преобразовании Фурье**. Далее в нашем тексте также появятся эти доп.коэффициенты, единообразного определения мы придерживаться не станем.

$$\hat{f}(\boldsymbol{\nu})=\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{x})e^{-i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu})}d\boldsymbol{x}$$

- Запишите обратное преобразование Фурье для этого случая

Как и ранее справедливо (но доказательство этого нетривиально) тождество Фурье в случае, когда обе функции $f(\boldsymbol{x}),\hat{f}(\boldsymbol{\nu})$ интегрируемы на $\mathbb{R}^2$ (и, стало быть, они и непрерывны в $\mathbb{R}^2$), именно этим случаем мы далее ограничимся. Основные свойства интегрального преобразования Фурье почти очевидно можно перенести на многомерный случай, отметим здесь версию свойства масштабируемости: для невырожденного линейного оператора $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}: f(\mathcal{A}\boldsymbol{x})\mapsto|\det\mathcal{A}|^{-1}\hat{f}\left(\left(\mathcal{A}^T\right)^{-1}(\boldsymbol{\nu})\right)$$

Важное наблюдение для интегрального случая

Рассмотрим ограничение $\hat{f}(\nu_1)$ непрерывной функции $\hat{f}(\nu_1,\nu_2)$ на прямую $\nu_2=0$; соответствующие значения совпадают с интегральным преобразованием Фурье $\int_{\mathbb{R}}\check{f}(x_1)e^{-i\pi x_1\nu_1}dx_1$ от функции $\check{f}(x_1)=\mathcal{P}[f](x_1)=\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2)dx_2\ x_1$, которую уместно называть *интегральным проектированием* на координатную ось. Можно записать это символически как тождество операторов, используя обозначение $\mathcal{K}$ для оператора ограничения функции двух переменных на координатную прямую: $\mathcal{K}\mathcal{F}=\mathcal{F}\mathcal{P}$. Исходя из того, что интегральное двумерное преобразование Фурье определено через скалярное произведение и потому не зависит от поворота систем координат, можно сделать вывод, что указанное тождество применимо к любой паре ортогональных прямых, проходящих через начало координат.

Преобразование Радона

Интегральное преобразование Радона в его классическом смысле сопоставляет дифференциируемой и интегрируемой в $\mathbb{R}^2$ функции $f(\boldsymbol{x})$ семейство C интегралов от ограничений этой функции на всевозможные (афинные) прямые из $\mathbb{R}^2$. У этого семейства афинных прямых имеется естественная параметризация (t,θ), с $-\infty<t<+\infty$ и $0\leqslant\theta<\pi$ (r,ϕ), см. Рис.1: Результат преобразования Фурье в указанной параметризации называется *синограммой.*

В качестве упражнения рассмотрим явное аналитическое вычисление преобразования Радона для простой функции $\mathbf{1}_{D^2}$ двух переменных

$$\mathbf{1}_{D^2}(x_1,x_2)=\begin{cases}1 & x_1^2+x_2^2\leqslant 1\\0 & x_1^2+x_2^2>1\end{cases}$$

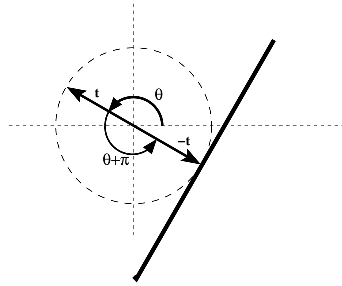

Рис. 1: Параметризация областью $\mathbb{R} \times [0, \pi)$ аффинных прямых в $\mathbb{R}^2$

- Запишите явно результат преобразования Радона $\Re[\mathbf{1}_{D^2}]$ от функции $\mathbf{1}_{D^2}$, с использованием указанной выше параметризации (t, θ).

Таким образом возникает преобразование $\Re$ из пространства дифференциируемых и интегрируемых функций двух переменных $f(x_1, x_2)$ в функции $\check{f}(t, \theta)$ (каждой прямой сопоставляется интеграл по ней от f), это частный пример более общей конструкции преобразования, разработанного Дж. Радоном в 1917.

Связь с преобразованием Фурье: важное наблюдение

Рассмотрим ограничение $\hat{f}(\nu_1)$ непрерывной функции $\hat{f}(\nu_1, \nu_2)$ на прямую $\nu_2 = 0$; соответствующие значения совпадают с интегральным преобразованием Фурье $\int_{\mathbb{R}} \check{f}(x_1) e^{-i\pi x_1 \nu_1} dx_1$ от функции $\check{f}(x_1) = \mathcal{P}[f](x_1) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) dx_2 \; x_1$, которую уместно называть *интегральным проектированием* на координатную ось. Можно записать это символически как тождество операторов, используя обозначение $\mathcal{K}$ для оператора ограничения функции двух переменных на координатную прямую: $\mathcal{K}\digamma = \digamma\mathcal{P}$. Исходя из того, что интегральное двумерное преобразование Фурье определено через скалярное произведение и потому не зависит от поворота систем координат, можно сделать вывод, что указанное тождество применимо к любой паре ортогональных прямых, проходящих через начало координат.

Теоретическая обратимость преобразования Радона

Заметим, что значения $\check{f}$ задают на проходящей через начало координат прямой значения интегральных проекций $f(x_1, x_2)$ на эту прямую, а в силу «важного наблюдения» выше они задают и ограничение двумерного преобразования Фурье $\hat{f}(\boldsymbol{\nu})$ на эту же прямую. Таким образом, преобразование Радона позволяет восстановить сужение $\hat{f}(\boldsymbol{\nu})$ на любую прямую, проходящую через начало координат. Поскольку вся плоскость $\mathbb{R}^2$ содержится в объединении таких «центральных» прямых, то тем самым из $\check{f}(t, \theta)$ в аналитической версии можно восстановить целиком всю функцию $\hat{f}(\boldsymbol{\nu})$, а следовательно, благодаря двумерному тождеству Фурье, восстановить и исходную функцию $f(x_1, x_2)$. Однако реализация связана с некоторыми трудностями, например, аналитические формулы преобразования Радона не подсказывают очевидного дискретного грида на плоскости, на котором бы удобно вести вычисления. Другие трудности для реальных вычислений связаны с рассмотрением «не самых хороших» функций двух переменных.

Хохлов Андрей Владимирович

Профессор, доктор физико-математических наук
Главный научный сотрудник Института теории прогноза з
математической геофизики Российской академии наук
Профессор Факультета математики Высшей школы экономики
Главный научный сотрудник Геофизического центра РАН

fbmotion@yandex.ru